

Identificação de Parâmetros na Colisão de Veículos Terrestres

Aluno: Bruno de Barros Mendes Kassar

**Orientadores:
Washington Braga Filho
e
Mauro Speranza Neto**

2006

1. Introdução

Este relatório descreve as atividades do bolsista Bruno Kassar junto ao seu projeto de Iniciação Científica apoiado pelo CNPq, PIBIC. O projeto teve por objetivo a investigação do processo de colisão entre dois veículos. A partir do estudo da Dinâmica Veicular, um processo de otimização da função objetivo (distância final entre os dois veículos) foi desenvolvido. Este relatório descreve as principais etapas e resultados obtidos durante o desenvolvimento deste trabalho.

2. Colisão Plana entre Veículos Rígidos

A Segunda Lei de Newton para uma massa constante em movimento pode ser escrita com a seguinte equação:

$$m \frac{dv(t)}{dt} = F(t)$$

Onde m é massa constante e puntiforme, $v(t)$ a velocidade e $F(t)$ a soma de todas as forças externas à massa m .

Isso significa que a massa tem sua velocidade variada proporcionalmente ao somatório de forças externas aplicadas a ela.

Integrando-se a equação acima num intervalo de tempo de t_1 a t_2 , temos:

$$m \int_{t_1}^{t_2} dv = mv(t_2) - mv(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} F(t) dt$$

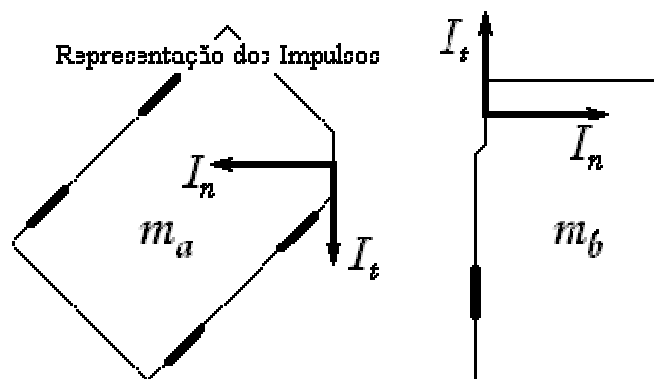
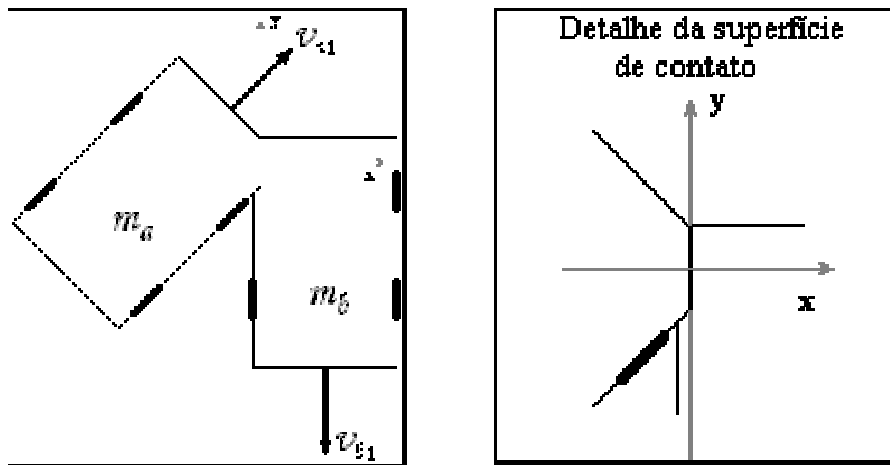
O produto mv (massa . velocidade) é o que chamamos de momento linear. É o momento de um corpo de massa m que se move a uma velocidade $v(t)$.

Na equação acima vemos claramente que a integral da força F em relação ao tempo provoca uma variação do momento linear do corpo de massa m . Essa variação na quantidade de movimento é chamada Impulso (I).

$$I(t) = \int_{t_1}^t F(t) dt$$
$$I(t) = mv(t) - mv(t_1)$$

Quando dois corpos colidem e experimentam contato superficial por um instante de tempo relativamente pequeno, a força de contato tende a ser significativamente maior que outras forças externas agindo nos corpos. Assim podemos desprezar as forças não-impulsivas. A grande aceleração resultante é devida ao impulso provocado pela força impulsiva de contato. Desprezando as forças que não são de contato entre os dois corpos podemos aplicar a Segunda Lei de Newton para cada corpo submetido apenas à força impulsiva de contato.

Definimos a superfície de contato entre os dois veículos como um plano, para simplificar nosso estudo e direcionar os esforços deste trabalho nos efeitos macroscópicos do problema e não nas deformações dos veículos. Nessa superfície, definimos um sistema de referência (referencial da colisão) com o eixo x perpendicular a essa superfície e o y paralelo, como nas figuras abaixo.



Aplicando a equação $I = m \Delta v$ nos dois corpos temos as seguintes equações:

$$\begin{aligned} I_n &= m_a v_{a2n} - m_a v_{a1n} & (1) \\ I_t &= m_a v_{a2t} - m_a v_{a1t} & (2) \\ -I_n &= m_b v_{b2n} - m_b v_{b1n} & (3) \\ -I_t &= m_b v_{b2t} - m_b v_{b1t} & (4) \end{aligned}$$

Devido ao período de contato ser relativamente pequeno, assumimos que as velocidades variam instantaneamente sem que os corpos alterem de posição. Simplificando o sistema de 4 equações acima obtemos o par de equações abaixo que representa a variação do momento linear do sistema (os dois corpos). Repare que essa variação é nula tanto na direção normal quanto tangencial à superfície do choque. Isso significa que a quantidade de movimento do sistema é conservada.

$$\begin{aligned} (m_a v_{a2n} - m_a v_{a1n}) + (m_b v_{b2n} - m_b v_{b1n}) &= 0 \\ (m_a v_{a2t} - m_a v_{a1t}) - (m_b v_{b2t} - m_b v_{b1t}) &= 0 \end{aligned}$$

Suponhamos que as massas e as velocidades iniciais (problema direto) dos dois corpos são dadas (no problema inverso, sabemos as velocidades finais e queremos obter as iniciais). Temos então 6 incógnitas: v_{a2t} , v_{a2n} , v_{b2t} , v_{b2n} , \mathbf{I}_t e \mathbf{I}_n e apenas 4 equações independentes (1,2,3 e 4). Portanto, precisamos de mais duas equações independentes das demais para resolver o problema.

A quinta equação que precisamos vem da definição do coeficiente de restituição (e). Ele relaciona as velocidades de aproximação dos veículos (antes da colisão) com a velocidade de separação (pós-colisão). A velocidade relativa entre os veículos é definida pelo vetor v_r , que é dado pela equação:

$$v_r = \begin{bmatrix} v_m \\ v_{rt} \end{bmatrix} = v_{b0} - v_{a0} = \begin{bmatrix} v_{b0n} - v_{a0n} \\ v_{b0t} - v_{a0t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{bn} - v_{an} + \mathbf{V}_b \cdot \mathbf{y}_b - \mathbf{V}_a \cdot \mathbf{y}_a \\ v_{bt} - v_{at} + \mathbf{V}_b \cdot \mathbf{x}_b - \mathbf{V}_a \cdot \mathbf{x}_a \end{bmatrix}$$

Sabendo-se calcular a velocidade relativa, podemos escrever:

$$e = \frac{-v_{rn2}}{v_{rn1}} \quad (5)$$

O coeficiente e pertence ao intervalo de 0 a 1.

- $e = 0$? colisão inelástica (os corpos permanecem em contato após a colisão)
- $0 < e < 1$? colisão elástica (os corpos se separam com velocidade relativa menor que a de aproximação)
- $e = 1$? colisão perfeitamente elástica (a velocidade de separação é igual em módulo à de aproximação)

A sexta equação relaciona a componente tangencial do impulso com sua componente normal. Para tanto, definimos um novo coeficiente que denominaremos *taxa de impulso* e será representado pela letra grega λ (?).

$$I_t = \lambda \cdot I_n \quad (6)$$

Esta taxa de impulso não é um coeficiente de atrito, no entanto pode ser relacionada com tal. Por enquanto esse coeficiente deve ser visto apenas como a taxa de impulso $\lambda = I_t/I_n$. Note que λ pode ser negativo, positivo ou zero. Seu sinal determina o sentido do impulso tangencial e depende das condições iniciais de velocidade, que serão vistas em breve.

Resolvendo o sistema de 6 equações, temos a seguinte solução matricial [1]:

$$\begin{bmatrix}
 m_A & 0 & m_B & 0 & 0 & 0 \\
 0 & m_A & 0 & m_B & 0 & 0 \\
 m_A(y_A - \mathbf{I}x_A) & 0 & 0 & 0 & -J_A & 0 \\
 0 & 0 & m_B(y_B - \mathbf{I}x_B) & 0 & 0 & -J_B \\
 e & 0 & -e & 0 & ey_A & -ey_B \\
 \mathbf{I} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 v_{Ax1} \\
 v_{Ay1} \\
 v_{Bx1} \\
 v_{By1} \\
 \mathbf{w}_{A1} \\
 \mathbf{w}_{B1}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 m_A & 0 & m_B & 0 & 0 & 0 \\
 0 & m_A & 0 & m_B & 0 & 0 \\
 m_A(y_A - \mathbf{I}x_A) & 0 & 0 & 0 & -J_A & 0 \\
 0 & 0 & m_B(y_B - \mathbf{I}x_B) & 0 & 0 & -J_B \\
 -1 & 0 & 1 & 0 & -y_A & y_B \\
 \mathbf{I} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 v_{Ax2} \\
 v_{Ay2} \\
 v_{Bx2} \\
 v_{By2} \\
 \mathbf{w}_{A2} \\
 \mathbf{w}_{B2}
 \end{bmatrix}
 \quad (7)$$

A tabela 1 abaixo indica a nomenclatura dos diferentes parâmetros:

Tabela 1: variáveis de input no modelo de colisão

m	massa do respectivo veículo
J	momento de inércia do veículo em torno de seu centro de massa
x	coordenada x do CG do veículo no referencial da colisão
y	coordenada y do CG do veículo no referencial da colisão
V _{x1}	componente x da velocidade linear pré-colisão
V _{x2}	componente x da velocidade linear pós-colisão
V _{y1}	componente y da velocidade linear pré-colisão
V _{y2}	componente y da velocidade linear pós-colisão
? ₁	velocidade angular pré-colisão
? ₂	velocidade angular pós-colisão
?	taxa de impulso
e	coeficiente de restituição

Para encontrar o Impulso, basta substituir as velocidades iniciais e finais nas equações 1 e 2 ou 3 e 4. Os sufixos A e B identificam as variáveis dos carros A e B respectivamente e os inteiros 1 e 2 representam variáveis de pré e pós-choque respectivamente.

3. Taxa de Impulso Crítica λ_0

Existe um valor de λ para o qual I_t causa *velocidade relativa tangencial* entre os pontos de contato dos corpos pós-colisão nula. Esse valor de λ é chamado de *taxa de impulso crítica* (λ_0). Para $I_t = \lambda_0 I_n$, a *velocidade relativa tangencial pós choque* é nula.

$$I_0 = \frac{r \cdot A + (1 + e) \cdot B}{(1 + e) \cdot (1 + C) + r \cdot B}$$

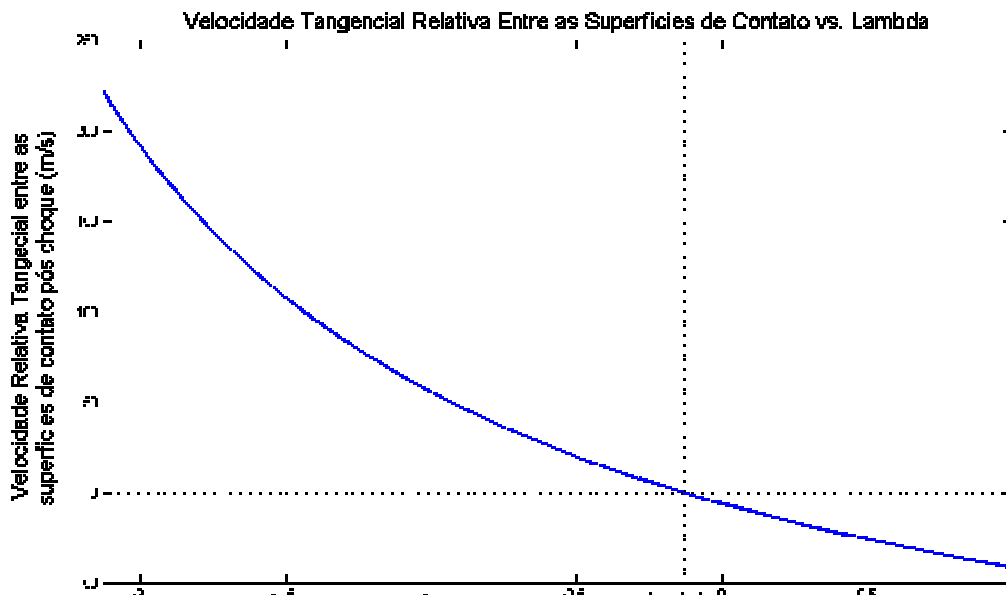
onde

$$A = 1 + \frac{\bar{m} \cdot y_a^2}{m_a k_a^2} + \frac{\bar{m} \cdot y_b^2}{m_b k_b^2} \quad B = \frac{\bar{m} \cdot x_a \cdot y_a}{m_a k_a^2} + \frac{\bar{m} \cdot x_b \cdot y_b}{m_b k_b^2}$$

$$C = \frac{\bar{m} \cdot x_a^2}{m_a k_a^2} + \frac{\bar{m} \cdot x_b^2}{m_b k_b^2} \quad \bar{m} = \frac{m_a \cdot m_b}{m_a + m_b}$$

$$r = \frac{(v_{b1t} - \mathbf{w}_{b1} \cdot \mathbf{x}_b) - (v_{a1t} - \mathbf{w}_{a1} \cdot \mathbf{x}_a)}{(v_{b1n} - \mathbf{w}_{b1} \cdot \mathbf{y}_b) - (v_{a1n} - \mathbf{w}_{a1} \cdot \mathbf{y}_a)}$$

O sinal de λ_0 é determinado pelas condições iniciais. Ele determina o sentido do impulso tangencial, como já dito anteriormente. Pela definição, $I_t = \lambda I_n$, então o deslizamento não ocorre na separação quando $I_t = \lambda_0 I_n$, uma vez que a velocidade relativa tangencial pós-colisão para λ_0 é nula. O seguinte gráfico exemplifica como a velocidade tangencial entre as superfícies de contato pós-choque se comporta quando se varia o valor da taxa de impulso. Nota-se ainda que esta velocidade se anula quando $\lambda = \lambda_0$.



Apresentada esta idéia de *taxa de impulso crítica*, podemos fazer uma primeira análise fisicamente plausível de λ .

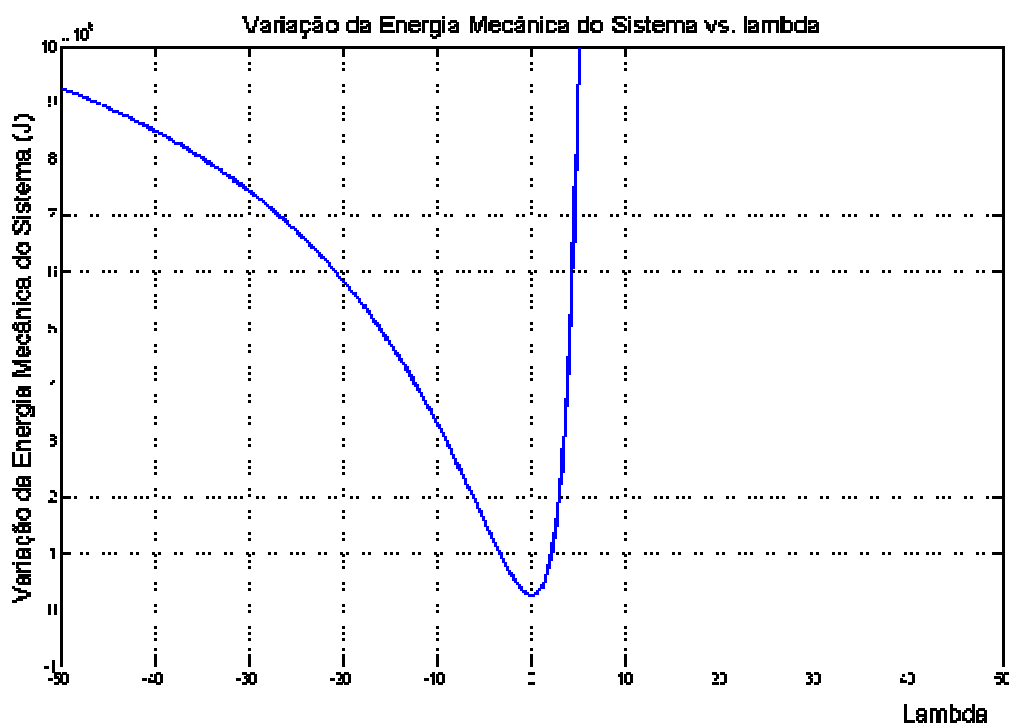
- $\lambda = 0$? velocidade relativa tangencial constante antes e depois da colisão;
- $0 < \lambda < \lambda_0$? velocidade relativa tangencial diminui em módulo apenas;
- $\lambda = \lambda_0$? velocidade relativa tangencial nula na iminência de terminar o contato entre os veículos;
- $\lambda > \lambda_0$? velocidade relativa tangencial entre as superfícies de contato muda de sentido.

4. Interpretando a Taxa de Impulso

A energia mecânica considerada foi a energia cinética, uma vez que não são considerados desníveis na pista. Assim, não há variação significativa em energia potencial. Portanto a variação da Energia Mecânica fica:

$$\Delta E = \left[\left(\frac{m_a \cdot V_{a2}^2}{2} \right) + \left(\frac{m_b \cdot V_{b2}^2}{2} \right) \right] - \left[\left(\frac{m_a \cdot V_{a1}^2}{2} \right) + \left(\frac{m_b \cdot V_{b1}^2}{2} \right) \right]$$

onde V é o módulo do respectivo vetor velocidade.

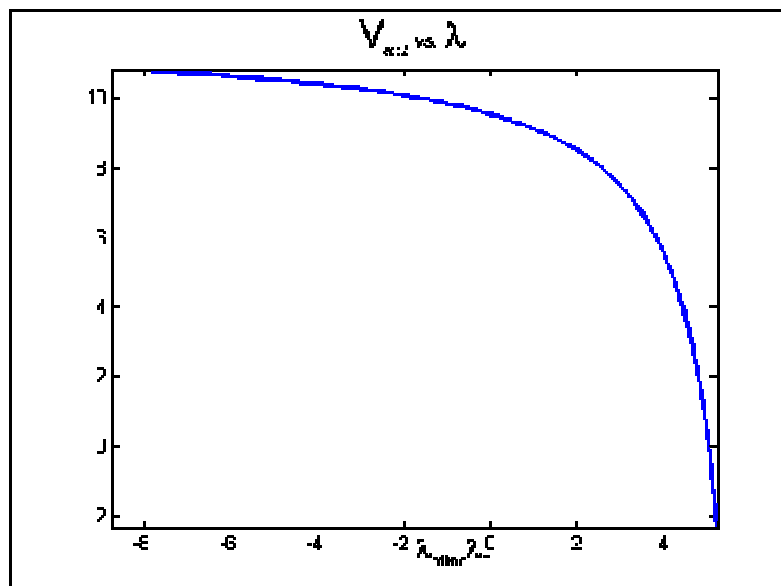


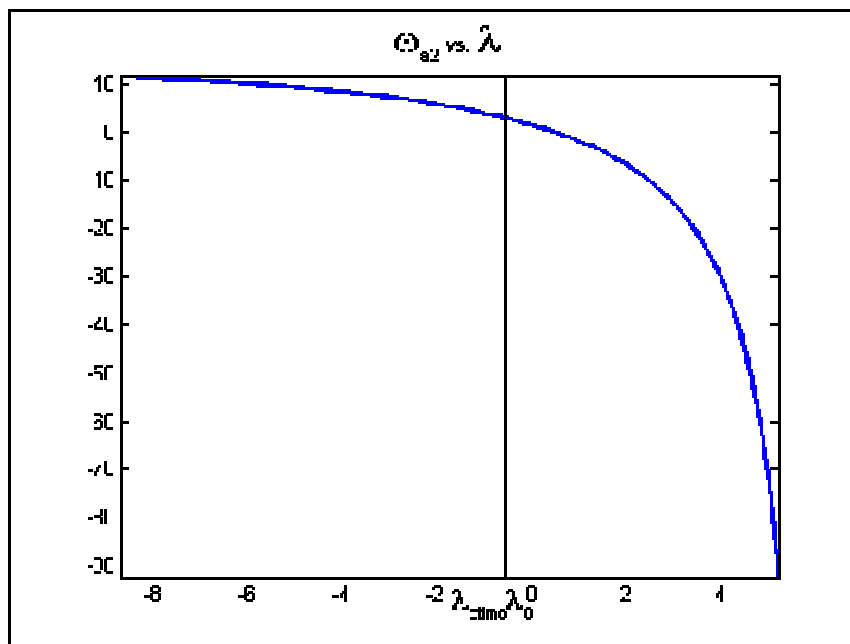
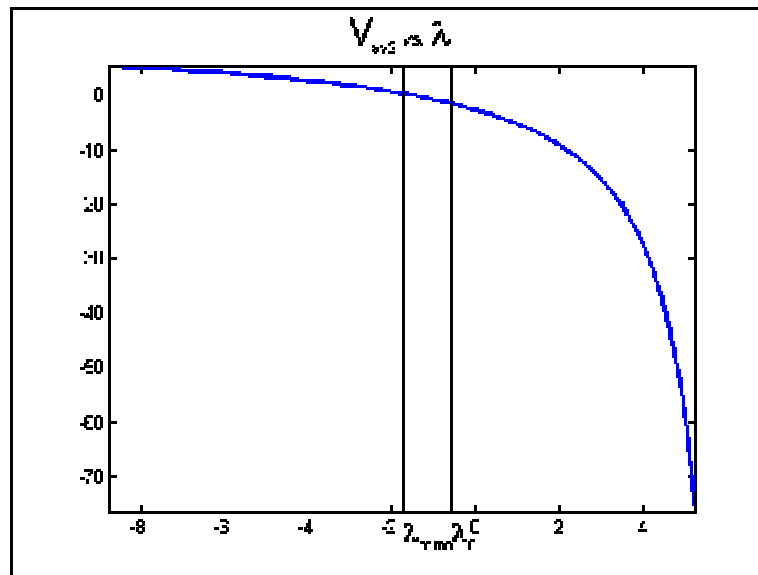
Nota-se que para $\lambda=0$, a perda de energia é mínima, o que era de se esperar. Com $\lambda=0$, não há perda transversal, pois assim o impulso tangencial é nulo. Nesse caso, apenas o impulso normal está presente na colisão, o que é a causa dessa perda energética.

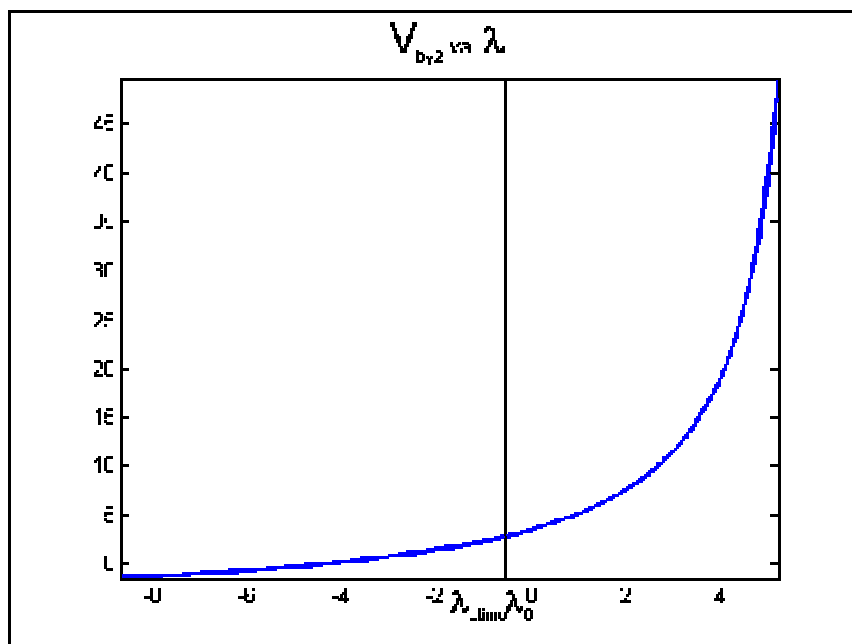
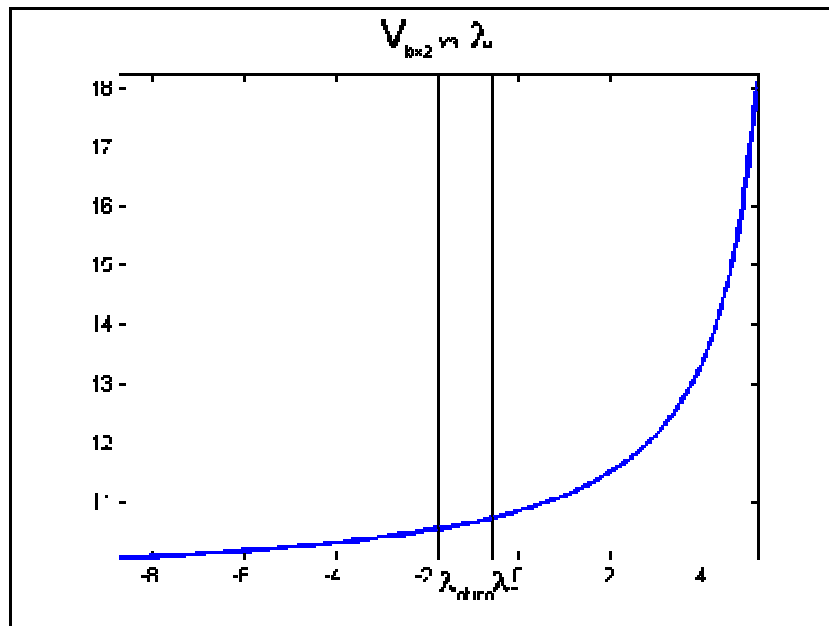
Os seis gráficos a seguir apresentam a variação das velocidades lineares e angulares de cada um dos dois veículos em função de λ . Para obter esses resultados, os valores de λ foram variados em torno de λ_0 . $\lambda_{\text{ótimo}}$ é o melhor valor encontrado para λ pelo algoritmo de otimização. Repare que $\lambda_{\text{ótimo}}$ e λ_0 têm o mesmo sinal têm valores próximos um do outro. No caso obtivemos seguintes valores de λ_0 e $\lambda_{\text{ótimo}}$:

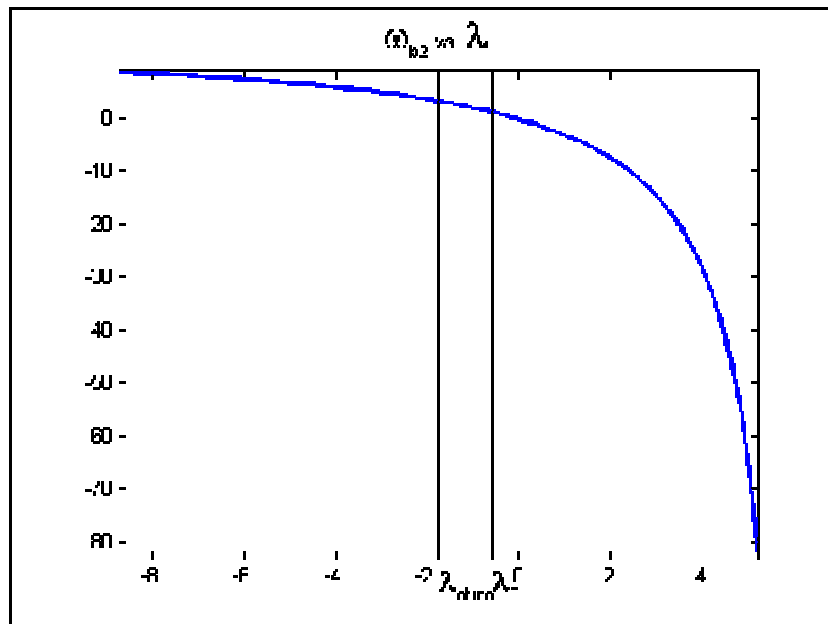
Tabela 2: valores notáveis da taxa de impulso

λ_0	-0.5645
$\lambda_{\text{ótimo}}$	-1.75544154

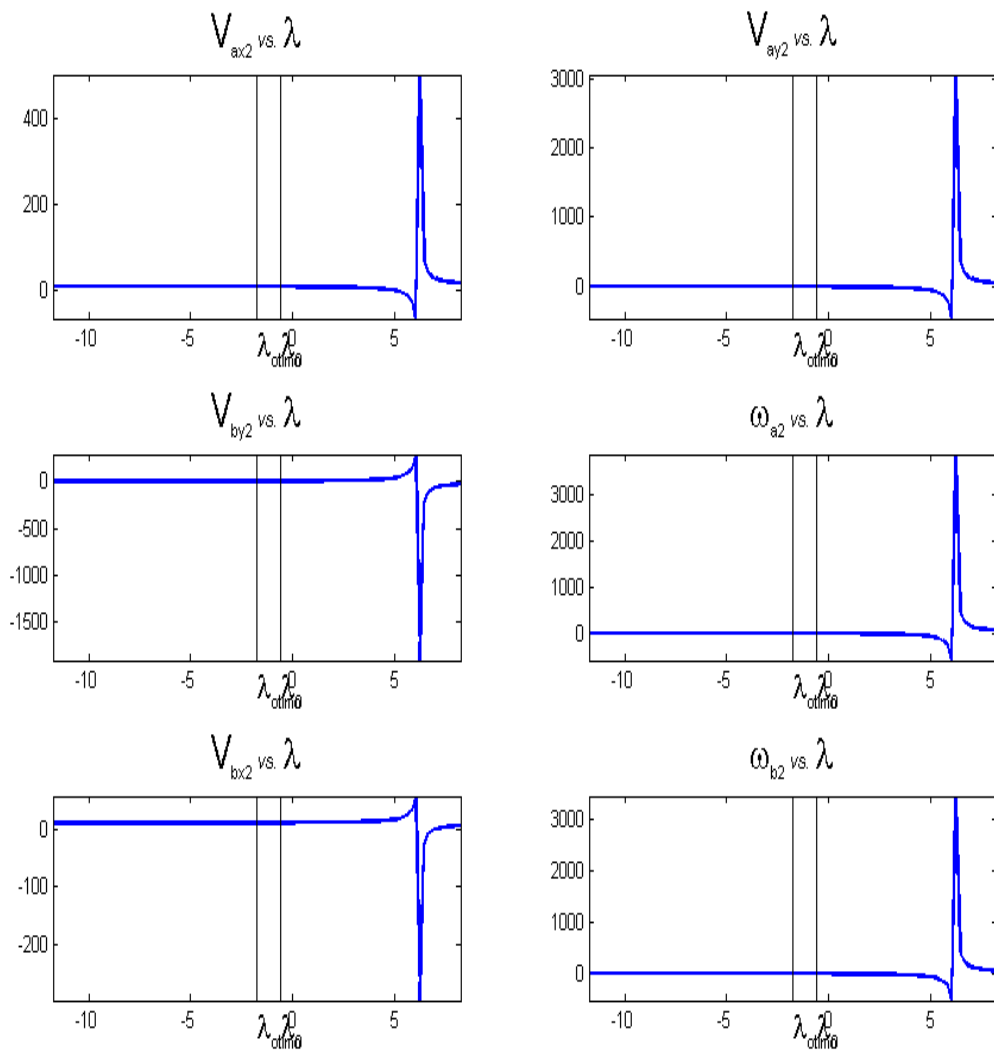








Podemos observar que, em torno de λ_0 , os 6 gráficos anteriores são bastante comportados e variam de forma sutil. No entanto, para intervalos distantes de λ_0 , podemos observar um comportamento assintótico em um determinado trecho. Nesse trecho, a variação da taxa de impulso provoca efeitos indesejados e portanto esses valores devem ser evitados de modo a evitar soluções inconsistentes.



5. O Problema de Otimização

No presente trabalho, temos como motivação investigar as causas das colisões entre dois veículos dadas suas condições finais, em repouso após o choque. Essas informações podem ser obtidas com medições diretas no local do acidente. Utilizaremos as seguintes condições finais de um acidente para se ter um exemplo prático:

Tabela 3: cenário dos veículos em repouso após a colisão

m_a	Massa de A	1040	kg
J_a	Momento de Inércia de A	1269.4	kg.m ²
b_a	Largura de A	1.5480	m
ld_a	Distância do CG de A a sua dianteira	1.6148	m

l_{ta}	Distância do CG de A a sua traseira	2.4438	m
m_b	Massa de B	1668	kg
J_b	Momento de Inércia de B	2.097.4	kg.m ²
b_b	Largura de B	1.6080	m
l_{db}	Distância do CG de B a sua dianteira	1.6224	m
l_{tb}	Distância do CG de B a sua traseira	2.4336	m
x_{fc_a}	Coordenada x final do CG de A no eixo global	46.5937	m
y_{fc_a}	Coordenada y final do CG de A no eixo global	-0.7676	m
β_{ca}	Ângulo final de A com o eixo x global	123.4309	graus
x_{fc_b}	Coordenada x final do CG de B no eixo global	49.7841	m
y_{fc_b}	Coordenada y final do CG de B no eixo global	2.7096	m
β_{cb}	Ângulo final de B com o eixo x global	430.3363	graus

O modelo de colisão já apresentado anteriormente (7) precisa de dados que não possuímos a fim de se chegar à condição pós-colisão da tabela 4. Esses valores serão determinados a partir de um processo de otimização via Algoritmo Genético. Eles formam um conjunto de variáveis que daremos o nome de indivíduo (mais adiante esse termo será explicado). A estrutura do vetor indivíduo pode ser vista na tabela abaixo:

Tabela 4: variáveis presentes no cromossomo de cada indivíduo

1	X_col	Coordenada x do centro da colisão
2	Y_col	Coordenada y do centro da colisão
3	Vax1	Coordenada x da velocidade linear inicial do veículo A
4	Vay1	Coordenada y da velocidade linear inicial do veículo A
5	Wa1	Velocidade angular inicial do veículo A
6	Vbx1	Coordenada x da velocidade linear inicial do veículo B
7	Vby1	Coordenada y da velocidade linear inicial do veículo B
8	Wb1	Velocidade angular inicial do veículo B
9	xia	Coordenada x do ponto inicial que define a área de choque no veículo A
10	yia	Coordenada y do ponto inicial que define a área de choque no veículo A
11	xfa	Coordenada x do ponto final que define a área de choque no veículo A
12	yfa	Coordenada y do ponto final que define a área de choque no veículo A
13	xib	Coordenada x do ponto inicial que define a área de choque no veículo B
14	yib	Coordenada y do ponto inicial que define a área de choque no veículo B
15	angulo	Angulo que determina a posição angular dos veículos no momento do choque em relação ao eixo global

O objetivo é encontrar o melhor conjunto de variáveis (mais apto) que seja capaz de reproduzir o acidente através do modelo de colisão e chegar a uma disposição dos veículos na

pista próxima o suficiente do que foi medido pelo perito. Salienta-se que após a aplicação do modelo de colisão, as condições dos veículos no instante pós-choque são aplicadas a um modelo de freada (descrito em [1]), que não é objeto do estudo. Esse modelo de freada leva os veículos até a posição de repouso e retorna os valores das posições para que sejam comparadas com as medições. Quanto mais próximos das posições reais forem esses valores, melhor o vetor de soluções. Queremos obter então o melhor vetor-solução possível e para tanto, lançaremos mão de um algoritmo de otimização.

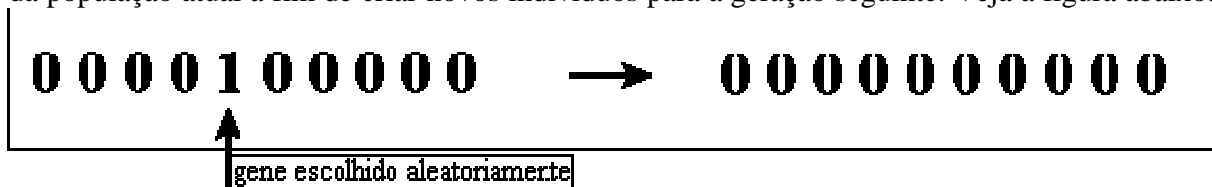
6. Algoritmos Genéticos

O GA (*Genetic Algorithm*) foi criado sob inspiração da Teoria Evolucionária de Darwin. De acordo com esta teoria, os seres vivos são constantemente selecionados e apenas os mais aptos sobrevivem. Esses indivíduos que sobrevivem à Seleção Natural, têm mais tempo de vida e portanto, maior probabilidade de se reproduzir. Assim, seus códigos genéticos perpetuam nas gerações seguintes. O GA utiliza a mesma idéia de seleção e reprodução entre os indivíduos, utilizando ainda o processo de mutação, previsto por Darwin para marcar a evolução das espécies.

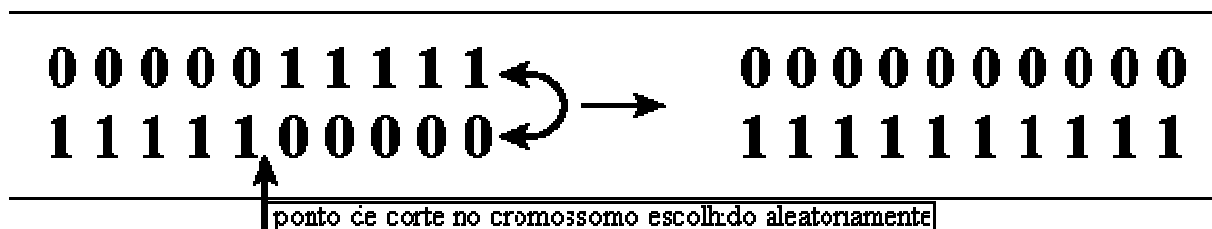
O objetivo básico de se aplicar qualquer algoritmo de otimização é o de otimizar alguma função. Essa função recebe o nome de *função-objetivo* e é o critério de seleção utilizado pelo algoritmo. Quanto melhor o valor da função-objetivo aplicada a um indivíduo, mais apto ele é a sobreviver. Chamamos de indivíduos, os valores que pertencem ao domínio da função-objetivo e que, aplicados a ela são classificados em ordem de aptidão. Os melhores indivíduos sofrem mutação e/ou cross-over e geram novos indivíduos para a geração seguinte. O GA é executado em etapas que chamamos de gerações. Cada uma delas representa um momento do processo evolutivo em que se encontra a população de indivíduos. Na passagem de uma geração para a próxima é que ocorrem os processos de mutação e reprodução.

Indivíduo é um conjunto de valores (genes) que se candidata a ser a solução do problema de otimização. Apenas aqueles mais aptos sobreviverão e darão origem a novos indivíduos gerados por mutação e cross-over (ou reprodução) ou simplesmente serão replicados para a próxima geração caso façam parte da elite (os melhores indivíduos).

Mutação é um procedimento pseudo-aleatório (isto é gerado a partir de um número gerado em um computador) que troca o valor de genes aleatoriamente de uma certa porção de indivíduos da população atual a fim de criar novos indivíduos para a geração seguinte. Veja a figura abaixo:



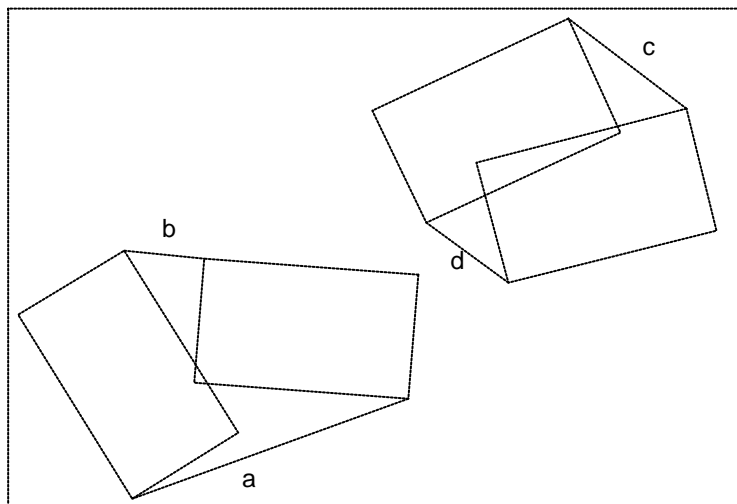
Reprodução ou *Cross-Over* é um processo, também pseudo-aleatório, que troca entre dois indivíduos uma seqüência de genes como na figura abaixo. A troca entre as seqüências de genes pode ocorrer em um ou mais pontos no interior do cromossomo (nesse caso ocorrem dois pontos de corte).



A função-objetivo, ou função de avaliação do presente estudo foi proposta por [1]. Ela deve ser muito bem definida a fim de poder diferenciar um bom indivíduo de um ruim. Nosso objetivo é encontrar as melhores condições iniciais dos veículos antes do choque que levem às posições de repouso observadas. Portanto queremos encontrar o indivíduo que gera a condição de parada mais próxima da real. Isso é o mesmo que minimizar a distância obtida com a esperada. É exatamente isso que a função-objetivo está fazendo, calculando um valor que representa essa distância. Portanto essa função será minimizada.

$$F = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

onde a,b,c e d são as distâncias plotadas na figura abaixo. Os retângulos tracejados representam as posições reais observadas e os em linha cheia são as posições obtidas através do modelo físico já discutido anteriormente.



Os procedimentos utilizados para aplicar o GA a esse problema de colisão são apresentados nos tópicos abaixo na ordem em que são executados.

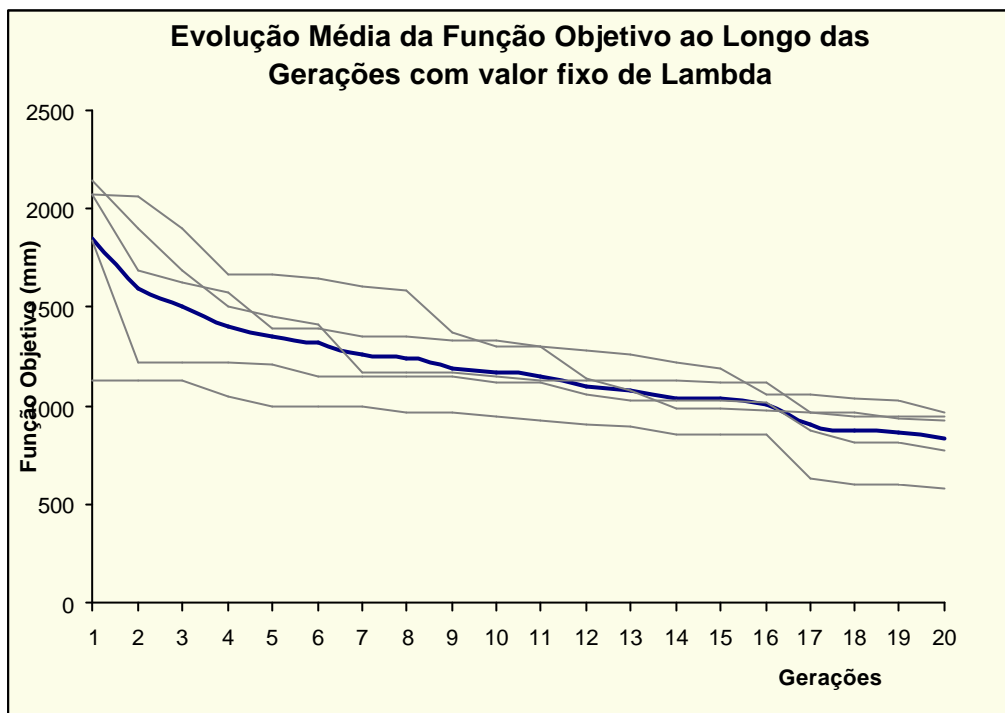
- 1) Criação da população Inicial: diversos indivíduos são gerados dentro de um intervalo de valores adequado. Quando mais próximo esse intervalo estiver dos valores ótimos, mais rápida será a convergência do algoritmo.
- 2) Aplicação de cada indivíduo ao modelo físico de colisão e desaceleração pós-choque: os indivíduos contêm as variáveis que desejamos otimizar e que são os inputs do modelo. As variáveis utilizadas estão apresentadas na tabela 4.
- 3) Com os outputs do modelo, calculamos o valor da função-objetivo para cada indivíduo. Esse valor é a medida de aptidão de cada um e é ele que determinará o destino do mesmo: se ele será eliminado ou perpetuado.
- 4) O GA faz um ranking dos indivíduos de acordo com seus valores de aptidão e seleciona os melhores. Os indivíduos selecionados serão perpetuados e os demais eliminados.

- 5) Nova geração é criada a partir dos indivíduos selecionados. Eles sofrem mutação, cross-over ou replicação sem alteração do cromossomo.
- 6) Os processos 2 ao 5 se repetem até que algum critério de parada seja acionado (máximo número de gerações, tempo máximo de computação, valor ótimo para a função-objetivo alcançado etc).
- 7) Quando o critério de parada é acionado, o algoritmo termina suas iterações e retorna a última população com o melhor indivíduo selecionado. Este indivíduo contém os melhores genes selecionados e é a solução do problema de otimização.

A seguir apresentamos alguns dados obtidos com a aplicação do GA para otimização das variáveis já apresentadas na tabela 4. O Algoritmo foi rodado 5 vezes para se ter um resultado médio mais representativo (o processo é estatístico). O dados coletados foram os seguintes para a função-objetivo em cada geração.

Tabela 5: valores da função-objetivo ao longo das gerações

		1 ^a	2 ^a	3 ^a	4 ^a	5 ^a	média
Gerações	1	2073	2141	1842	1129	2074	1851,8
	2	1680	1897	1221	1129	2068	1599
	3	1625	1680	1221	1129	1897	1510,4
	4	1578	1499	1221	1047	1660	1401
	5	1400	1451	1214	998,9	1660	1344,78
	6	1400	1414	1150	998,9	1647	1321,98
	7	1346	1167	1150	998,9	1609	1254,18
	8	1346	1167	1150	960,6	1586	1241,92
	9	1335	1167	1148	960,6	1376	1197,32
	10	1335	1155	1119	946,7	1302	1171,54
	11	1306	1127	1119	924,5	1302	1155,7
	12	1139	1127	1060	897,8	1287	1102,16
	13	1077	1127	1028	892,8	1259	1076,76
	14	981,3	1127	1027	859,4	1223	1043,54
	15	981,3	1118	1027	859,4	1189	1034,94
	16	976,5	1118	1012	859,4	1052	1003,58
	17	963,3	966,7	873,7	636	1052	898,34
	18	949,7	966,7	810	598,6	1031	871,2
	19	949,1	938,7	810	598,6	1026	864,48
	20	946,9	923,4	775,5	580,4	963,7	837,98



A tabela a seguir demonstra os melhores indivíduos obtidos em cada uma das 5 rodadas do GA

Tabela 6: valores dos melhores indivíduos em cada uma das 5 rodadas do algoritmo

	1 ^a	2 ^a	3 ^a	4 ^a	5 ^a	média
X_col	39,5744	39,3145	39,9598	39,4817	40,222	39,71048
Y_col	-1,202625	-1,130675	-1,089825	-0,911425	-1,180225	-1,10296
Vax1	11,8908	12,0892	11,719	12,1572	11,4878	11,8688
Vay1	-1,3036	-1,4607	-1,5325	-2,4205	-1,4752	-1,6385
Wa1	1,70255	1,7849	1,8831	1,41735	1,69385	1,69635
Vbx1	10,3464	10,4898	10,1928	10,2028	9,837	10,21376
Vby1	1,38435	1,46275	1,71465	1,583	1,5588	1,54071
Wb1	-0,5147	-0,62795	-0,41129	-0,45731	-0,5816	-0,51857
xia	1,6148	1,6148	1,6148	1,6148	1,6148	1,6148
yia	-0,3724488	-0,38704644	-0,38613699	-0,3450492	-0,37662066	-0,37346
xfa	1,451291811	1,45331677	1,454348628	1,470656493	1,446825274	1,455288
yfa	0,774	0,774	0,774	0,774	0,774	0,774
xib	-2,17534393	-2,17490589	-2,17613972	-2,17134796	-2,17652666	-2,17485
yib	0,804	0,804	0,804	0,804	0,804	0,804
a	2,2913	2,7021	2,62	2,8235	1,7806	2,4435

Como a taxa de impulso é uma variável de que não dispomos muita informação, ela também foi otimizada. A tabela a seguir reporta os resultados obtidos com o GA incluindo o ? nos cromossomos:

Tabela 7: valores da função-objetivo ao longo das gerações para indivíduos com taxa de impulso em um de seus genes

		1 ^a	2 ^a	3 ^a	4 ^a	5 ^a	média
Gerações	1	2378	2209	2496	1630	2117	2166
	2	1586	1997	2082	1630	1949	1848,8
	3	1586	1616	2082	1455	1949	1737,6
	4	1586	1616	2082	1361	1827	1694,4
	5	1551	1616	1995	1179	1568	1581,8
	6	1483	1435	1946	1146	1442	1490,4
	7	1483	1411	1765	1146	1417	1444,4
	8	1472	1367	1765	1116	1280	1400
	9	1139	1353	1739	1092	1280	1320,6
	10	1139	1244	1739	1033	1280	1287
	11	1139	1244	1543	1009	1280	1243
	12	1108	1244	1396	936,4	1250	1186,88
	13	1108	1244	1323	832,9	1250	1151,58
	14	1083	1220	1190	821,1	1250	1112,82
	15	1023	1220	1069	757,9	1189	1051,78
	16	967,8	1200	1068	753,4	1160	1029,84
	17	967,8	1179	964	724,7	1160	999,1
	18	950,4	1171	964	717,3	1083	977,14
	19	950,4	1164	952,7	706,5	1083	971,32
	20	886,9	1144	952,2	703,4	1083	953,9

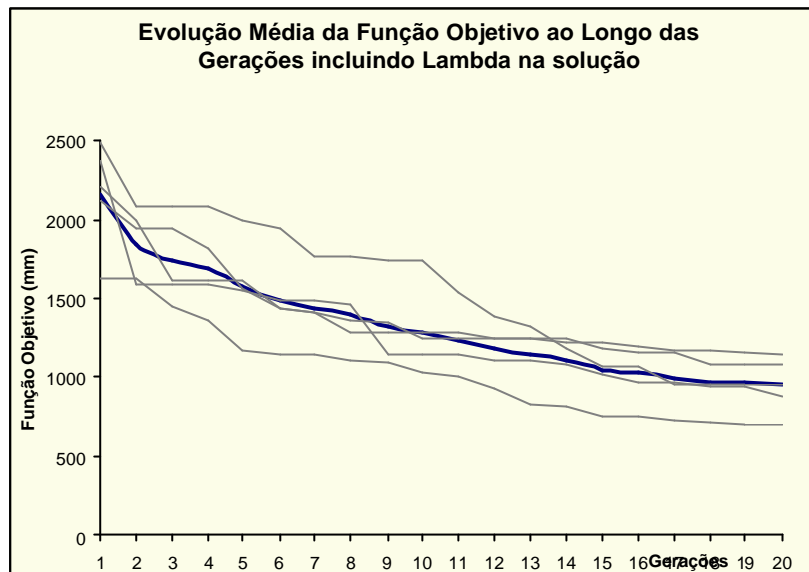
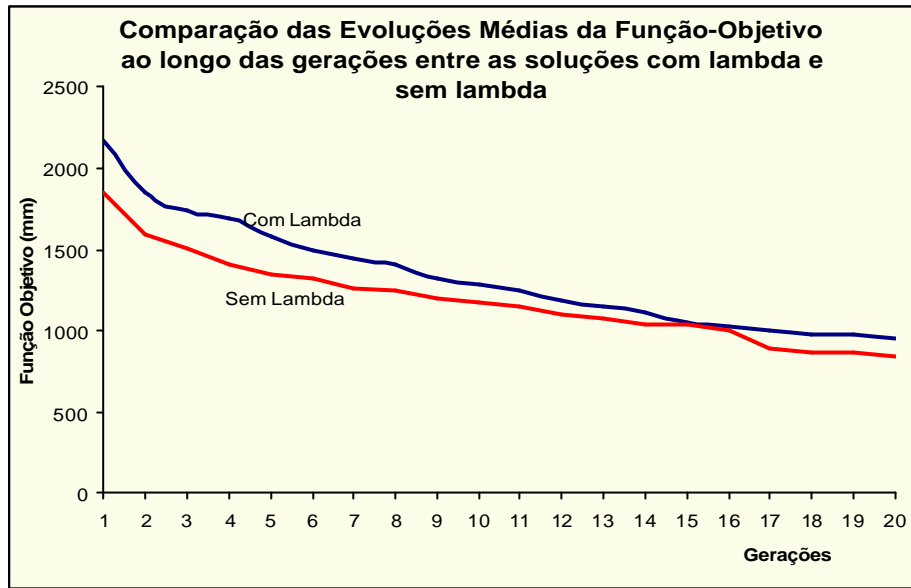


Tabela 8: : valores dos melhores indivíduos em cada uma da 5 rodadas do algoritmo com taxa de impulso

	1 ^a	2 ^a	3 ^a	4 ^a	5 ^a	média
X_col	39,2995	39,9288	39,7495	39,5122	40,1633	39,73066
Y_col	-1,2327	-1,0706	-1,103	-1,01813	-1,1141	-1,107705
Vax1	12,1376	11,6484	11,9332	11,7948	11,575	11,8178
Vay1	-1,1144	-1,4124	-1,4161	-1,485	-1,2592	-1,33742
Wa1	1,8638	1,64285	2,05855	1,8727	2,02745	1,89307
Vbx1	10,6542	10,07	10,0792	10,3958	9,791	10,19804
Vby1	1,28805	1,3967	1,159	1,20545	1,3782	1,28548
Wb1	-0,39743	-0,52049	-0,46925	-0,44108	-0,52253	-0,470156
xia	1,6148	1,6148	1,6148	1,6148	1,6148	1,6148
ya	-0,37232	-0,38711	-0,39942	-0,3849	-0,37035	-0,3828219
xfa	1,450119	1,450373	1,454163	1,45289	1,454087	1,4523266
yfa	0,774	0,774	0,774	0,774	0,774	0,774
xib	-2,1677	-2,18485	-2,15349	-2,16646	-2,16061	-2,1666234
yib	0,804	0,804	0,804	0,804	0,804	0,804
a	2,436	2,8158	2,5187	2,4179	3,0204	2,64176
?	-1,80104	-1,86202	-1,45899	-2,07703	-1,57814	-1,7554415



Observamos que os resultados na solução que envolve a taxa de impulso tiveram valores próximos, apesar de ligeiramente maiores. Esses resultados se devem a um fato bastante compreensível. Aumentamos um gen dos indivíduos, portanto temos uma variabilidade ainda maior. Além disso o critério de parada adotado em ambos os casos foi o de parar quando se chegar à vigésima (20ª) geração, o que explica um resultado pior para o caso em que incluímos o lambda.

Para provar o parágrafo anterior, será apresentado o resultado do caso com lambda com critério de parada de 30 gerações. Pode –se observar que a função-objetivo é minimizada ainda mais na medida em que aumentamos o número de gerações. Mas o tempo de computação aumenta consideravelmente.

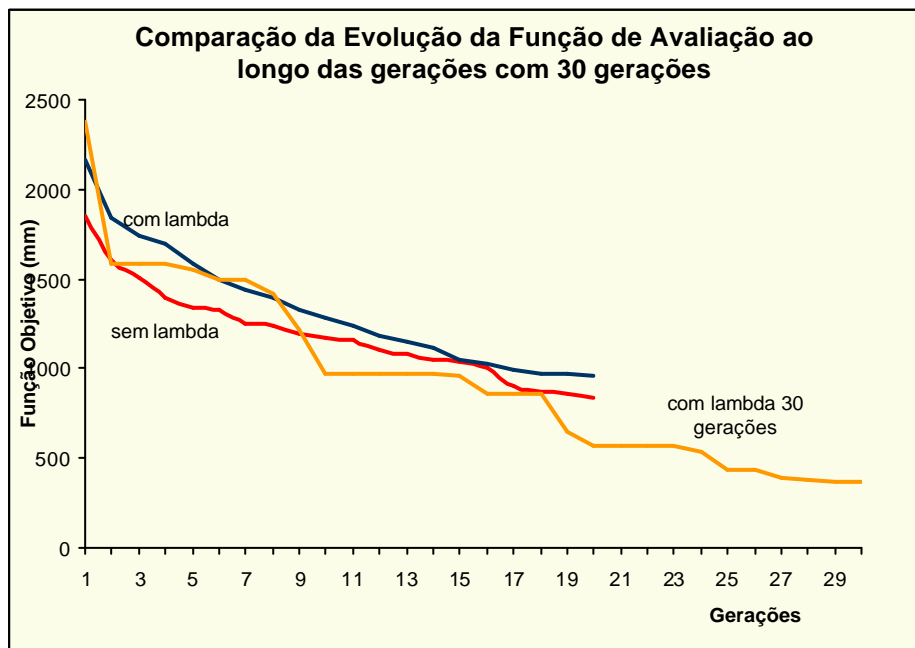


Tabela 9: comparação entre as funções-objetivo nos casos sem lambda (20 gerações), com lambda (20 gerações e com lambda (30 gerações)

	sem lambda (média)	com lambda (média)	com lambda 30
1	1851,8	2166	2378
2	1599	1848,8	1586
3	1510,4	1737,6	1586
4	1401	1694,4	1586
5	1344,78	1581,8	1551
6	1321,98	1490,4	1488
7	1254,18	1444,4	1488
8	1241,92	1400	1416
9	1197,32	1320,6	1209
10	1171,54	1287	978,4
11	1155,7	1243	978,4
12	1102,16	1186,88	978,4
13	1076,76	1151,58	978,4
14	1043,54	1112,82	978,4
15	1034,94	1051,78	960,9
16	1003,58	1029,84	858,2
17	898,34	999,1	853,6
18	871,2	977,14	853,6
19	864,48	971,32	646,1
20	837,98	953,9	566,3
21			566,3
22			566,3
23			563,8
24			537,8
25			441,8
26			441,8
27			389
28			374,9
29			371
30			370,7

Tabela 10: melhor indivíduo para 30 gerações de evolução

	Melhor indivíduo
X_col	-1,0029
Y_col	0,0079
Vax1	0,0869
Vay1	-0,273
Wa1	0,6754
Vbx1	0,4006
Vby1	0,6134
Wb1	0,3503
xia	-0,0825
yia	1,5656
xfa	-0,2402
yfa	-0,2835
xib	0,8388
yib	0,0432
a	-1,1087
?	-0,592

8. Conclusões

Através do processo de otimização, foi possível se encontrar as condições iniciais dos veículos antes da colisão com boa precisão, dadas as condições finais pós-choque. Dependendo da precisão desejada, pode-se aumentar ou diminuir o número de gerações máximo ou variar outro critério de parada, como o valor mínimo da função-objetivo. Mas vale lembrar que quanto maior a precisão, maior deve ser o gasto computacional. O parâmetro taxa de impulso, como pode ser visto nos gráficos já apresentados, é um parâmetro que requer cuidado ao ser estimado. Seu valor crítico é bastante útil para se ajudar a estimar o valor ótimo. Além do mais, o sinal de ? ótimo deve ser igual ao de ? crítico.

Como sugestão para futuros trabalhos, torna-se importante agora avançar no processo de otimização de forma a se entender adequadamente a relevância dos parâmetros já mostrados. Pela natureza do presente trabalho, apenas uma visão superficial do problema está contemplada, ainda que com resultados animadores.

9. Referências

1 – MARTINS, Guilherme Nobrega, ‘**Solução, via Algoritmos Genéticos, de um problema inverso em engenharia: a reconstituição de acidentes com veículos terrestres.**’ Rio de

Departamento de Engenharia Mecânica

Janeiro, 2005. Dissertação de Mestrado - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento Engenharia de Mecânica

2 – Brach, M.R. & Brach R.M., “**Vehicle Accident Analysis and Reconstruction Methods**”, SAE International, 2005.

3 – ABDULMASSIH, Diogo Soares, **Modelos de Veículos Rígidos para Análise e Simulação de Colisões e Reconstituição de Acidentes**. Rio de Janeiro, 2003. 244p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

4 – MATSUMOTO, Élia Yathie. **MATLAB 6.5: fundamentos de programação**. 2. ed. São Paulo: Érica, 2004.

Apêndice – Programas Matlab

Os códigos fonte utilizados pela tese [1] não estão incluídos nesses anexos, mas podem ser encontrados na mesma. Aqui estão incluídos os códigos acrescentados ao programa de colisão e alguns códigos de [1] com modificações para se adequar ao acréscimo da taxa de impulso nos cromossomos:

```
%bk_critical_lambda.m
%returns the critical value of lambda, given the initial condition

function lamb =
bk_critical_lambda(ma,mb,Ja,Jb,vax1,vay1,vbx1,vby1,wa1,wb1,xa,xb,ya,yb,cr)
m = (ma *mb) / (ma+mb);
ka = sqrt (Ja/ma); %raio de giracao de a
kb = sqrt (Jb/mb); %raio de giracao de b
r = ((vby1 - xb*wb1) - (vay1 + xa *wa1)) / ((vbx1 - yb *wb1) - (vax1 + ya * wa1));

A = 1 + (m * ya^2)/(ma*ka^2) + (m*yb^2)/(mb * kb^2);
B = (m*ya*xa)/(ma*ka^2) + (m*yb*xb)/(mb*kb^2);
C = (m*xa^2)/(ma*ka^2) + (m*xb^2)/(mb*kb^2);

lamb = (r * A + (1 +cr) * B) / ((1+cr) * (1+C) + r*B);
```

```
%cria_pop_uniform_espacada.m
%Cria População Inicial Uniformemente espaçada
function Population = cria_pop_uniform_espacada(GenomeLength,FitnessFcn,options)
n = options.PopulationSize;
range = options.PopInitRange;
lowerBound = range (1,:);
passo = (range (2,:)- lowerBound)./(n-1);
Population = [];
for i=1:n
    Population = [Population; (lowerBound + (i-1).*passo)];
end
```

```
%limites_ga.m
%Colisão Traseira%
global LI1 LS1 LI2 LS2 LI3 LS3 LI4 LS4 LI5 LS5 LI6 LS6 LI7 LS7 LI8 LS8
global LI9 LS9 LI10 LS10 LI11 LS11 LI12 LS12 LI13 LS13 LI14 LS14 LI15 LS15 LI16
LS16 LI17 LS17
global LI18 LS18
global ba lda lta
global ma Ja
global bb ldb ltb
global mb Jb
global Xcga Ycga Xcgb Ycgb fiac fibc
global var1 var2 var3 var4 var5 var6 var7 var8 var9 var10 var11 var12 var13 var14 var15
```

```
var1 = -0,28952;
var2 = 0,58818;
var3 = -0,0656;
var4 = -0,6385;
var5 = 0,3927;
var6 = 0,10688;
var7 = 1,08142;
var8 = -0,0619;
var9 = -0,00994;
var10 = 0,34986;
var11 = 0,12186;
var12 = 0,06642;
var13 = 0,63228;
var14 = 0,04374;
var15 = -0,5565;
```

```
% DIMENSOES E PROPRIEDADES DOS VEICULOS
```

```
% VEICULO 1
```

```
ma=1040;
Ja=1.2694e+003;
ba = 1.5480;
lda = 1.6148;
lta = 2.4438;
```

```
% VEICULO 2
```

```
mb=1668;
Jb=2.0974e+003;
bb = 1.6080;
ldb = 1.6224;
ltb = 2.4336;
```

```
%continua
```

%continuação de limites_ga.m

% LIMITES INFERIORES E SUPERIORES

% POSICAO E VELOCIDADES DOS VEICULOS

LI1 = 39; %40; %Limite inferior da variavel x do local de colisao
LS1 = 41; %LI1; %Limite superior da variavel x do local de colisao
LI2 = -1.5; %-1; %Limite inferior da variavel y do local de colisao
LS2 = -0.5; %LI2; %Limite superior da variavel y do local de colisao
LI3 = 10; %12; %Limite inferior da velocidade x de pre-colisao do veiculo 1
LS3 = 14; %LI3; %Limite superior da velocidade x de pre-colisao do veiculo 1
LI4 = -2; %-1; %Limite inferior da velocidade y de pre-colisao do veiculo 1
LS4 = 0; %LI4; %Limite superior da velocidade y de pre-colisao do veiculo 1
LI5 = 1.0; %1.5; %Limite inferior da velocidade angular de pre-colisao do veiculo 1
LS5 = 2.0; %LI5; %Limite superior da velocidade angular de pre-colisao do veiculo 1
LI6 = 8; %10; %Limite inferior da velocidade x de pre-colisao do veiculo 2
LS6 = 12; %LI6; %Limite superior da velocidade x de pre-colisao do veiculo 2
LI7 = 0.5; %1; %Limite inferior da velocidade y de pre-colisao do veiculo 2
LS7 = 1.5; %LI7; %Limite superior da velocidade y de pre-colisao do veiculo 2
LI8 = -0.8; %0; %Limite inferior da velocidade angular de pre-colisao do veiculo 2
LS8 = -0.2; %LI8; %Limite superior da velocidade angular de pre-colisao do veiculo 2

% PARTES COLIDIDAS DO VEICULO 1

LI9 = lda; %lda; %Limite inferior de xia
LS9 = lda; %LI9; %Limite superior de xia
LI10 = -0.55*ba/2;%-0,5*ba/2; %Limite inferior de yia
LS10 = -0.45*ba/2;%LI10; %Limite superior de yia
LI11 = 0.89*lda; %0.9*lda; %Limite inferior de xfa
LS11 = 0.91*lda; %LI11; %Limite superior de xfa
LI12 = ba/2; %ba/2; %Limite inferior de yfa
LS12 = ba/2; %LI12; %Limite superior de yfa

% PARTES COLIDIDAS DO VEICULO 2

LI13 = -0.91*ltb;%-0.9*ltb; %Limite inferior de xib
LS13 = -0.89*ltb;% LI13; %Limite superior de xib
LI14 = bb/2; %bb/2; %Limite inferior de yib
LS14 = bb/2; %LI14; %Limite superior de yib
LI15 = -ltb; %-ltb; %Limite inferior de xfb
LS15 = -ltb; %LI15; %Limite superior de xfb
LI16 = bb/2; %bb/2; %Limite inferior de yfb
LS16 = bb/2; %LI16; %Limite superior de yfb

%continua

```
%continuação de limites_ga.m
```

```
% LIMITES DO ANGULO (EM GRAUS) DO VEICULO 1 NO REFERENCIAL GLOBAL  
%
```

```
LI17 = 2;    %3;    %Limite inferior do angulo (em graus) do veículo 1 em relação ao  
referencial global
```

```
LS17 = 4;    %LI17;    %Limite superior do angulo (em graus) do veículo 1 em relação ao  
referencial global
```

```
vax1 = (LI3+LS3 + var3 * (LS3-LI3))/2;
```

```
vay1 = (LI4+LS4 + var4* (LS4-LI4))/2;
```

```
wa1 = (LI5+LS5 + var5* (LS5-LI5))/2;
```

```
vbx1 = (LI6+LS6 + var6* (LS6-LI6))/2;
```

```
vby1 = (LI7+LS7 + var7* (LS7-LI7))/2;
```

```
wb1 = (LI8+LS8 + var8* (LS8-LI8))/2;
```

```
%inicializa Xcga, Xcgb, Ycga e Ycgb  
geometria_auxiliar_bk
```

```
xa = Xcga;
```

```
xb = Xcgb;
```

```
ya = Ycga;
```

```
yb = Ycgb;
```

```
cr = 0.5;
```

```
lambda_critico = bk_critical_lambda(ma, mb, Ja, Jb, vax1, vay1,...  
vbx1, vby1, wa1, wb1, ...  
xa, xb, ya, yb, cr);
```

```
%lim inf de lambda %lim sup de lambda
```

```
if (lambda_critico <0)
```

```
    LI18 = 5*lambda_critico;
```

```
    LS18 = 0;
```

```
else
```

```
    LI18 = 0;
```

```
    LS18 =5*lambda_critico;
```

```
end
```

```
%cria graficos em função de lambda
global lambda
global v_2

vax2= [];
vay2= [];
vbx2= [];
vby2= [];
wa2= [];
wb2= [];
l=[];

otimo=-1.75544154;
crit = -0.5645;
limites_ga

for lambda = otimo-7:0.2:otimo+7
colisao_ga;
l = [1;lambda];
vax2= [vax2;v_2(1)];
vay2= [vay2;v_2(2)];
vbx2= [vbx2;v_2(3)];
vby2= [vby2;v_2(4)];
wa2= [wa2; v_2(5)];
wb2= [wb2; v_2(6)];
end

xlim = [min(l) max(l)];
figure('Color',[1 1 1]);
plot (l,vax2,'LineWidth',2);
line([crit,crit],[min(vax2),max(vax2)],'Color',[0 0 0]);
text(crit,min(vax2),'{\fontsize{16}\lambda}_{0}','VerticalAlignment','top');
line([otimo,otimo],[min(vax2),max(vax2)],'Color',[0 0 0]);
text(otimo,min(vax2),'{\fontsize{16}\lambda}_{otimo}','VerticalAlignment','top');
axis([xlim min(vax2) max(vax2)]);
title('\fontsize{20}V_{ax2} {\itvs.} {\fontsize{20}\lambda}');

figure('Color',[1 1 1]);
plot (l,vay2,'LineWidth',2);
line([crit,crit],[min(vay2),max(vay2)],'Color',[0 0 0]);
text(crit,min(vay2),'{\fontsize{16}\lambda}_{0}','VerticalAlignment','top');
line([otimo,otimo],[min(vay2),max(vay2)],'Color',[0 0 0]);
text(otimo,min(vay2),'{\fontsize{16}\lambda}_{otimo}','VerticalAlignment','top');
axis([xlim min(vay2) max(vay2)]);
title('\fontsize{20}V_{ay2} {\itvs.} {\fontsize{20}\lambda}');

%continua
```

%continuação dos gráficos

```
figure('Color',[1 1 1]);
plot(1,vbx2,'LineWidth',2);
line([crit,crit],[min(vbx2),max(vbx2)],'Color',[0 0 0]);
text(crit,min(vbx2),'{\fontsize{16}\lambda}_{0}','VerticalAlignment','top');
line([otimo,otimo],[min(vbx2),max(vbx2)],'Color',[0 0 0]);
text(otimo,min(vbx2),'{\fontsize{16}\lambda}_{otimo}','VerticalAlignment','top');
axis([xlim min(vbx2) max(vbx2)]);
title('{\fontsize{20}V}_{bx2} {\itvs.} {\fontsize{20}\lambda}');
```

```
figure('Color',[1 1 1]);
plot(1,vby2,'LineWidth',2);
line([crit,crit],[min(vby2),max(vby2)],'Color',[0 0 0]);
text(crit,min(vby2),'{\fontsize{16}\lambda}_{0}','VerticalAlignment','top');
line([otimo,otimo],[min(vby2),max(vby2)],'Color',[0 0 0]);
text(otimo,min(vby2),'{\fontsize{16}\lambda}_{otimo}','VerticalAlignment','top');
axis([xlim min(vby2) max(vby2)]);
title('{\fontsize{20}V}_{by2} {\itvs.} {\fontsize{20}\lambda}');
```

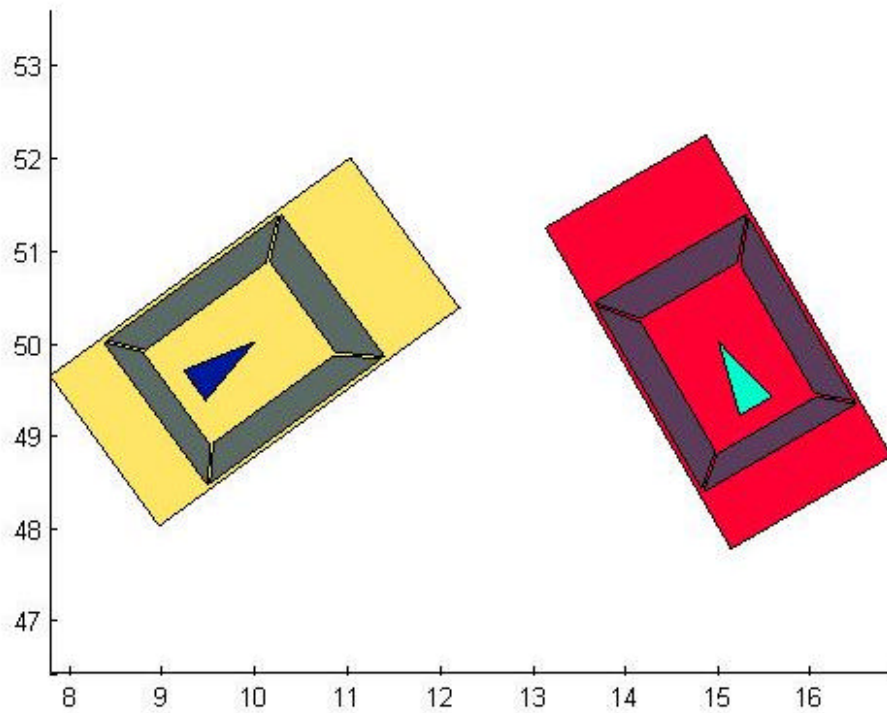
```
figure('Color',[1 1 1]);
plot(1,wa2,'LineWidth',2);
line([crit,crit],[min(wa2),max(wa2)],'Color',[0 0 0]);
text(crit,min(wa2),'{\fontsize{16}\lambda}_{0}','VerticalAlignment','top');
line([otimo,otimo],[min(wa2),max(wa2)],'Color',[0 0 0]);
text(otimo,min(wa2),'{\fontsize{16}\lambda}_{otimo}','VerticalAlignment','top');
axis([xlim min(wa2) max(wa2)]);
title('{\fontsize{20}\omega}_{a2} {\itvs.} {\fontsize{20}\lambda}');
```

```
figure('Color',[1 1 1]);
plot(1,wb2,'LineWidth',2);
line([crit,crit],[min(wb2),max(wb2)],'Color',[0 0 0]);
text(crit,min(wb2),'{\fontsize{16}\lambda}_{0}','VerticalAlignment','top');
line([otimo,otimo],[min(wb2),max(wb2)],'Color',[0 0 0]);
text(otimo,min(wb2),'{\fontsize{16}\lambda}_{otimo}','VerticalAlignment','top');
axis([xlim min(wb2) max(wb2)]);
title('{\fontsize{20}\omega}_{b2} {\itvs.} {\fontsize{20}\lambda}');
```

```
global ma Ja                                %colisao_ga.m
global mb Jb
global cr
global Xcga Ycga Xcgb Ycgb fiac fibc
global LI1 LS1 LI2 LS2 LI3 LS3 LI4 LS4 LI5 LS5 LI6 LS6 LI7 LS7 LI8 LS8
global LI18 LS18
global wa2 wb2 Vax2 Vay2 Vbx2 Vby2
global var
% Coordenadas dos CG dos veículos em relação ao referencial do impacto (m)
va=Vcga;
```

Departamento de Engenharia Mecânica

Sugestão de uma solução gráfica mais amigável. Sabendo as posições dos veículos a cada instante, ou sabendo suas condições de movimento (velocidades, acelerações e posições), pode-se utilizar dos seguintes códigos para se obter uma renderização dos veículos como nas figuras a seguir.



Veículos e as marcas dos pneus:



```
%bk_CreateMovie.m
function bk_CreateMovie(CG1,L1,dD1,dT1,fi1,color1,...
    vel1,acel1,omega1,alfa1,...
    CG2,L2,dD2,dT2,fi2,color2,...
    vel2,acel2,omega2,alfa2,...
    dt,tspam)

figure ('Name','Movie',...
    'Color',[1 1 1]);
Pneus1 = [];Pneus2=[];
R1=bk_Movement(CG1,fi1,vel1,acel1,...
    omega1,alfa1,dt,tspam);
R2=bk_Movement(CG2,fi2,vel2,acel2,...
    omega2,alfa2,dt,tspam);
BOX = [R1(:,1) R1(:,2);R2(:,1) R2(:,2)];
xmin = min(BOX(:,1))-5;
xmax = max(BOX(:,1))+5;
ymin = min(BOX(:,2))-5;
ymax = max(BOX(:,2))+5;
clear BOX;

for frame = 1:1:tspam/dt+1

    aux_Pos1 = [R1(frame,1);R1(frame,2)];
    aux_Pos2 = [R2(frame,1);R2(frame,2)];;
    aux_Fi1 = R1(frame,3) ;
    aux_Fi2= R2(frame,3);
    aux_Vel1 =[R1(frame,4);R1(frame,5)];
    aux_Vel2 = [R2(frame,4);R2(frame,5)];
    aux_Omega1 = R1(frame,6);
    aux_Omega2 =R2(frame,6) ;

    bk_TiresTrack (Pneus1,Pneus2);
    Pn1=bk_CarRender(aux_Pos1,L1,dD1,dT1,aux_Fi1,color1);
    Pn2=bk_CarRender(aux_Pos2,L2,dD2,dT2,aux_Fi2,color2);

    Pneus1 = [Pneus1;Pn1];
    Pneus2 = [Pneus2;Pn2];

    axis equal;
    axis off;
    axis([xmin xmax ymin ymax]);

    %continua
```

```
                                                                    %continuação de bk_CreateMovie.m
M(frame) = getframe;
% pause
cla; %clear current axes
end

movie2avi(M,'Collision','FPS',1/dt,'compression','none','quality',20);
```

```
%bk_Movement.m
function R= bk_Movement (CG1,fi1,vel,acel,omega,alfa,dt,tspam)

Sf = @(s0,v0,a,dt) s0+v0*dt+1/2*a*dt^2;
Vf = @(v0,a,dt) v0+a*dt;
Fif = @(fi0,omega0,alfa,dt) fi0+omega0*dt+1/2*alfa*dt^2;
Omegaf= @(omega0,alfa,dt) omega0+alfa*dt;

R = [CG1 fi1 vel omega];
for time=dt:dt:tspam+dt
CG2 = [Sf(CG1(1),vel(1),acel(1),time),...
      Sf(CG1(2),vel(2),acel(2),time)]; %row vector
Fi2 = Fif(fi1,omega,alfa,time);
Vlinear2 = [Vf(vel(1),acel(1),time),...
           Vf(vel(2),acel(2),time)];
Omega2 = Omegaf (omega,alfa,time);

N = [CG2 Fi2 Vlinear2 Omega2];
R = [R;N];
end
```

```
%bk_TiresTrack.m
function bk_TiresTrack (TireMatrix1,TireMatrix2)
if (~isempty(TireMatrix1)||~isempty(TireMatrix2))
plot (TireMatrix1(:,1),TireMatrix1(:,2),...
      TireMatrix1(:,3),TireMatrix1(:,4),...
      TireMatrix1(:,5),TireMatrix1(:,6),...
      TireMatrix1(:,7),TireMatrix1(:,8),...
      TireMatrix2(:,1),TireMatrix2(:,2),...
      TireMatrix2(:,3),TireMatrix2(:,4),...
      TireMatrix2(:,5),TireMatrix2(:,6),...
      TireMatrix2(:,7),TireMatrix2(:,8));
set(findobj(gca,'Type','line'),...
'Color',[0.5 0.5 0.5],...
'LineStyle','none',...
'Marker','.');
end
```

```
%bk_CarRender.m
function Pneus=bk_CarRender (CG, L , dD, dT, fi, color)
de= [ dD ; L/2 ] ;
dd= [ dD ; -L/2 ] ;
te= [-dT ; L/2 ] ;
td= [-dT ; -L/2] ;

DE = bk_Transform (de, CG, fi);
DD = bk_Transform (dd, CG, fi);
TE = bk_Transform (te, CG, fi);
TD = bk_Transform (td, CG, fi);

WCOLOR = [ .2 .3 .4];
DCOLOR = [1 1 1] - color;
%back window
BW1 = bk_Transform ([td(1)*0.66; td(2)*0.95],CG,fi);
BW2 = bk_Transform ([td(1)*0.52; td(2)*0.62],CG,fi);
BW3 = bk_Transform ([te(1)*0.52; te(2)*0.62],CG,fi);
BW4 = bk_Transform ([te(1)*0.66; te(2)*0.95],CG,fi);

%left window
LW1 = bk_Transform ([te(1)*0.50; te(2)*0.62],CG,fi);
LW2 = bk_Transform ([de(1)*0.25; de(2)*0.62],CG,fi);
LW3 = bk_Transform ([de(1)*0.50; de(2)*0.95],CG,fi);
LW4 = bk_Transform ([te(1)*0.64; te(2)*0.95],CG,fi);

%right window
RW1 = bk_Transform ([td(1)*0.50; td(2)*0.62],CG,fi);
RW2 = bk_Transform ([dd(1)*0.25; dd(2)*0.62],CG,fi);
RW3 = bk_Transform ([dd(1)*0.50; dd(2)*0.95],CG,fi);
RW4 = bk_Transform ([td(1)*0.64; td(2)*0.95],CG,fi);

%front window
FW1 = bk_Transform ([dd(1)*0.27; dd(2)*0.60],CG,fi);
FW2 = bk_Transform ([dd(1)*0.52; dd(2)*0.95],CG,fi);
FW3 = bk_Transform ([de(1)*0.52; de(2)*0.95],CG,fi);
FW4 = bk_Transform ([de(1)*0.27; de(2)*0.60],CG,fi);

PneuDD = bk_Transform ([dd(1)*0.65; dd(2)],CG,fi);
PneuDE = bk_Transform ([de(1)*0.65; de(2)],CG,fi);
PneuTE = bk_Transform ([te(1)*0.65; te(2)],CG,fi);
PneuTD = bk_Transform ([td(1)*0.65; td(2)],CG,fi);
Pneus = [PneuDD',PneuDE',PneuTE',PneuTD'];

%direction
Direction1 = bk_Transform ([td(1) * 0.40; td(2) * 0.2],CG,fi);
Direction2 = CG;
Direction3 = bk_Transform ([te(1) * 0.40; te(2) * 0.2],CG,fi);
material metal;
%trimdata(ymat,ylim,xmat,xlim,'object');
%continua
```

%continuação de bk_CarRender.m

```
patch([TD(1) DD(1) DE(1) TE(1)],[TD(2) DD(2) DE(2) TE(2)],...
      color,'SpecularColorReflectance',0.5);%,...
patch([BW1(1) BW2(1) BW3(1) BW4(1)],...
      [BW1(2) BW2(2) BW3(2) BW4(2)], WCOLOR,'FaceAlpha',0.8);%,...
patch([LW1(1) LW2(1) LW3(1) LW4(1)],...
      [LW1(2) LW2(2) LW3(2) LW4(2)], WCOLOR,'FaceAlpha',0.8);
patch([RW1(1) RW2(1) RW3(1) RW4(1)],...
      [RW1(2) RW2(2) RW3(2) RW4(2)], WCOLOR,'FaceAlpha',0.8);
patch([FW1(1) FW2(1) FW3(1) FW4(1)],...
      [FW1(2) FW2(2) FW3(2) FW4(2)], WCOLOR,'FaceAlpha',0.8);
patch([Direction1(1) Direction2(1) Direction3(1)],...
      [Direction1(2) Direction2(2) Direction3(2)], DCOLOR);
```

%bk_CarRenderBefore.m

```
function r=bk_CarRenderBefore (CG, L , dD, dT, fi, color,P1global,P2global)
```

```
de= [ dD ; L/2 ] ;
```

```
dd= [ dD ; -L/2 ] ;
```

```
te= [-dT ; L/2 ] ;
```

```
td= [-dT ; -L/2 ] ;
```

```
DE = bk_Transform (de, CG, fi);
```

```
DD = bk_Transform (dd, CG, fi);
```

```
TE = bk_Transform (te, CG, fi);
```

```
TD = bk_Transform (td, CG, fi);
```

```
WCOLOR = [ .2 .3 .4];
```

```
DCOLOR = [1 1 1] - color;
```

```
%back window
```

```
BW1 = bk_Transform ([td(1)*0.66; td(2)*0.95],CG,fi);
```

```
BW2 = bk_Transform ([td(1)*0.52; td(2)*0.62],CG,fi);
```

```
BW3 = bk_Transform ([te(1)*0.52; te(2)*0.62],CG,fi);
```

```
BW4 = bk_Transform ([te(1)*0.66; te(2)*0.95],CG,fi);
```

```
%left window
```

```
LW1 = bk_Transform ([te(1)*0.50; te(2)*0.62],CG,fi);
```

```
LW2 = bk_Transform ([de(1)*0.25; de(2)*0.62],CG,fi);
```

```
LW3 = bk_Transform ([de(1)*0.50; de(2)*0.95],CG,fi);
```

```
LW4 = bk_Transform ([te(1)*0.64; te(2)*0.95],CG,fi);
```

```
%right window
```

```
RW1 = bk_Transform ([td(1)*0.50; td(2)*0.62],CG,fi);
```

```
RW2 = bk_Transform ([dd(1)*0.25; dd(2)*0.62],CG,fi);
```

```
RW3 = bk_Transform ([dd(1)*0.50; dd(2)*0.95],CG,fi);
```

```
RW4 = bk_Transform ([td(1)*0.64; td(2)*0.95],CG,fi);
```

%continua

```
%front window
FW1 = bk_Transform ([dd(1)*0.27; dd(2)*0.60],CG,fi);
FW2 = bk_Transform ([dd(1)*0.52; dd(2)*0.95],CG,fi);
FW3 = bk_Transform ([de(1)*0.52; de(2)*0.95],CG,fi);
FW4 = bk_Transform ([de(1)*0.27; de(2)*0.60],CG,fi);

%direction
Direction1 = bk_Transform ([td(1) * 0.40; td(2) * 0.2],CG,fi);
Direction2 = CG;
Direction3 = bk_Transform ([te(1) * 0.40; te(2) * 0.2],CG,fi);
material metal;
%trimdata(ymat,ylim,xmat,xlim,'object');
trimdata(2,0,0,1,'patch');
patch([TD(1) DD(1) DE(1) TE(1)],[TD(2) DD(2) DE(2) TE(2)],...
    color,'SpecularColorReflectance',0.5);%,...
patch([BW1(1) BW2(1) BW3(1) BW4(1)],...
    [BW1(2) BW2(2) BW3(2) BW4(2)], WCOLOR,'FaceAlpha',0.8);%,...
patch([LW1(1) LW2(1) LW3(1) LW4(1)],...
    [LW1(2) LW2(2) LW3(2) LW4(2)], WCOLOR,'FaceAlpha',0.8);
patch([RW1(1) RW2(1) RW3(1) RW4(1)],...
    [RW1(2) RW2(2) RW3(2) RW4(2)], WCOLOR,'FaceAlpha',0.8);
patch([FW1(1) FW2(1) FW3(1) FW4(1)],...
    [FW1(2) FW2(2) FW3(2) FW4(2)], WCOLOR,'FaceAlpha',0.8);
patch([Direction1(1) Direction2(1) Direction3(1)],...
    [Direction1(2) Direction2(2) Direction3(2)], DCOLOR);
r =trimdata(2,-2,0,1,'patch');
```

```
%bk_Transform.m          translação e rotação de um ponto
function R = bk_Transform (P,Transl, theta)
X= P(1) * cos(theta) - P(2) * sin(theta);
Y= P(1) * sin(theta) + P(2) * cos(theta);

R = [X + Transl(1); Y + Transl(2)];
```

```
%bk_Animation.m
%draws the frames of the car given as parameter
function bk_Animation (CG0, L , dD, dT, fi0, color,...
    dt,tspam,vel,acel,omega,alfa)
aux_Pos = CG0;
aux_Fi= fi0;
aux_Vel = vel;
Acel= acel;
aux_Omega = omega;
Alfa = alfa;

for tempo = 0:dt:tspam
    R= bk_Movement(aux_Pos,...
        aux_Fi,...
        dt,...
        aux_Vel,...
        Acel,...
        aux_Omega,...
        Alfa);
    aux_Pos = [R(:,1);R(:,2)];
    aux_Fi = R(:,3);
    aux_Vel = [R(:,4);R(:,5)];
    aux_Omega = R(:,6);
    clear R;
    bk_CarRender(aux_Pos,L,dD,dT,aux_Fi,color);
    pause
    cla
end
```