

# TEORIA DO CONTROLE E SIMULAÇÃO FÍSICA

**Aluno: Erick Talarico**  
**Orientador: Thomas Lewiner**

## **Introdução**

A motivação para essa iniciação científica veio do trabalho de Jos Stam em controle de simulação de fluídos [1], com o objetivo de melhorar a base científica do aluno pelo aprendizado de uma forte ferramenta teórica, a teoria do controle, junto com uma aplicação em simulação científica.

## **A teoria do controle**

A teoria do controle é vastamente utilizada em engenharia e com possíveis aplicações importantes em outras áreas da ciência. A teoria do controle serve para o estudo de sistemas regidos por equações diferenciais, sobre as quais temos influencia através de alguns parâmetros escolhidos. Isso se traduz na equação diferencial por ter, além das variáveis de estado, parâmetros que podemos controlar a cada instante.

Essa teoria é assim uma formalização de fenômenos influenciados por forças externas. Por exemplo, o vôo de um avião depende em parte da sua aerodinâmica, e em parte das direções que damos ao leme e do aileron.

## Capítulo I: Conceitos básicos

### Introdução

A teoria do controle estuda como um sistema evolui no tempo submetido a uma influência externa.

### Conceitos e notação

Sistema é o nome que usamos para nos referirmos ao problema de controle, ou seja, ao conjunto das variáveis e restrições.

Chamamos de variáveis de controle aquelas que representam a influência externa sobre o sistema. As variáveis de estado são aquelas cuja evolução desejamos controlar.

A questão básica da teoria do controle é como podemos influenciar as variáveis de estado através das variáveis de controle para alcançar um estado desejado. Por exemplo, na economia de um país interessa ao governo manter as taxas de inflação em certo nível, e o mesmo dispõe de certos recursos, emissão de notas, leis, tarifas, para tal; assim, a inflação é a variável de estado e o controle são os recursos dos quais o governo lança mão.

Como, em geral, a influência externa sobre o sistema é limitado, as variáveis de controle são submetidas a restrições.

O conjunto de valores que queremos que as variáveis de estado atinjam é o conjunto objetivo, mira ou target. Podemos nos referir a um target num instante determinado, quando queremos que as variáveis de estado tenham alcançado o conjunto objetivo num instante determinado; ou nos referimos a um target num tempo mensurável, o que chamamos também de problema de horizonte infinito.

Em geral a dinâmica do sistema é representada por uma equação diferencial :

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$$

$$x(t_0) = x_0$$

$$x \in \mathbb{R}^n = \text{variáveis de estado}$$

$$u \in \mathbb{R}^m = \text{variáveis de controle}$$

*Obs.:* Omitiremos a notação usual de vetor quando escrevermos as variáveis de estado e de controle para não ficar exaustivo, mas fica subentendido desde já que essas grandezas são vetores, ou seja, n-uplas ordenadas de variáveis.

Dizemos que um controle é bem sucedido se leva as variáveis do estado inicial ao target set  $\mathcal{T}(t_1)$  ou  $\mathcal{T} = \cup_{t \in \mathbb{R}_+} \mathcal{T}(t)$ , dependendo se tratamos de problema com instante final determinado ou de horizonte livre.

O conjunto de estratégias  $u(\bullet)$  que conduzirão o sistema ao conjunto target denotamos por  $\Delta$  ou  $\Delta_{t_1}$ . É, portanto, o conjunto dos controles bem sucedidos.

Podemos também nos questionar sobre a controlabilidade: conjunto controlável  $\square$  é o conjunto de estados iniciais que admitem ao menos uma estratégia bem sucedida ( $\Delta \neq \emptyset$ ).

*Obs.:* Já que lidamos com um sistema de equações diferenciais ordinárias, alguns autores incluem uma discussão sobre a estabilidade das soluções de tais sistemas de equações. São conhecidas as condições de estabilidade de Liapunov.

Para o problema de controlabilidade definimos:

- Conjunto controlável

As duas principais questões da controlabilidade são descrever  $\mathcal{C}(t_1)$  e saber como  $\mathcal{C}(t_1)$  varia mudando o conjunto de controles admissíveis.

*Obs.:* seria interessante (embora nem sempre seja verdade) que  $\mathcal{T} \subset \mathcal{C}$ , pois isso significa que existe um controle que trará o sistema de volta ao target caso alguma perturbação retire-o do mesmo. Isso tem importância fundamental, visto que a teoria do controle é usada em aplicações práticas, quando surgem imprecisões e perturbações inesperadas.

Também é interessante que  $\mathcal{C}$  seja um conjunto aberto pois no mundo real não existem fronteiras exatas nem somos capazes de medi-las precisamente. A situação mais favorável é  $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$ .

Quanto à estabilidade, é interessante que o problema seja estável quanto às variáveis de controle, pois, novamente, no mundo real não somos capazes de posicionar o sistema no estado inicial de forma exata.

- Reachable set at time  $t_1 : K(t_1; x_0)$  (conjunto alcançável no instante  $t_1$ )

O conjunto de todos os pontos atingíveis num dado instante usando-se todas as estratégias de controle  $u(\bullet) \in \mathcal{U}_m$ .

- Reachable cone  $RC(x_0)$

é o conjunto de todos  $K(x_0)$ ,  $t_1 \geq t_0$  associados cada ao seu respectivo instante  $t_1$ . É o conjunto  $\{(t, K(t; x_0)) \in \mathbb{R}^{n+1}; t \geq t_0\}$

Veremos que o estudo de  $\mathcal{C}(t_1)$  é análogo ao estudo de  $K(t_1; x_0)$  se mudarmos a variável de tempo  $t' = t_1 - t$ , pois assim para  $t \equiv t_1, t' \equiv 0$  e para  $t \equiv 0, t' \equiv t_1$  e a evolução do sistema se dará ao reverso.

Agora, além de estudar o conjunto controlável  $\mathcal{C}$  e o conjunto de controles bem sucedidos  $\Delta$ , quando aplicamos a teoria do controle queremos decidir afinal qual controle usar em nosso sistema e para tal escolha usamos um critério, uma preferência: aquele que gasta menos energia ou que leva o menor tempo para alcançar o target, e assim por diante. Matematicamente isso se expressa na forma de um funcional de custo (também chamado de critério de desempenho), o qual queremos minimizar.

*Obs.:* Considerando  $\Delta = \cup_{t_1 \geq t_0} \Delta_{t_1}$  e  $\mathcal{C} = \cup_{t_1 \geq t_0} \mathcal{C}(t_1)$  para cada  $u(\bullet)$  e  $x_0$  teremos um  $t_1$  correspondente para atingirmos  $\mathcal{T}$ ; logo  $t_1$  será função de  $u(\bullet)$  e  $x_0$ .

Caímos então em um problema variacional e nos interessa saber sobre a existência e unicidade de um controle ótimo e como achá-lo. Temos também a questão não imediatamente matemática da implementação do controle escolhido.

No funcional de custo podemos expressar vários interesses e até ponderá-los.

*Obs.:* assuntos relacionados

- equações diferenciais ordinárias

- teoria dos jogos:

A aplicação da teoria dos jogos leva em consideração um Target set que varia com o tempo  $\mathcal{T}(t)$  ou, ainda, um controle ou estado que são afetados pelo interesse do oponente que quer nos impedir de atingir nosso objetivo.

- cálculo variacional: ferramenta básica para se determinar o controle ótimo.

- controle estocástico:

Às vezes há influência de uma função distribuição de probabilidade no sistema (predeterminada e sobre a qual não temos controle).

$$\dot{x} = f(x, u(\cdot), \zeta(\cdot), t)$$

- efeitos observacionais:

Por vezes, não somos capazes de medir diretamente os valores das variáveis de estado do sistema, mas podemos observar efeitos dessas variáveis, efeitos esses que mantêm relação conhecida com as variáveis de estado. Nesse tipo de problema o caso mais favorável é aquele em que as variáveis observáveis e as variáveis de estado são relacionadas entre si por uma matriz constante no tempo:

$$x' = A \cdot x$$

- *time lags* (efeitos retardados):

Alguns fenômenos não possuem uma dinâmica instantânea, mas os efeitos daquilo que ocorre em um dado instante demoram um certo tempo para se pronunciarem.

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t, x(t - \tau), u(t - \tau))$$

- memória:

Em alguns sistemas o que acontece num instante influencia os demais instantes (anteriores e posteriores)

$$\dot{x} = M(t_1, t) \cdot f(x(t), u(t), t)$$

- *Dynamic Programming* (programação dinâmica):

É uma aplicação direta da teoria do controle para simulações computacionais. A programação dinâmica é muito útil visto que os problemas de controle podem ficar muito complexos quando adicionamos muitas variáveis, o que torna a resolução impossível sem computador. Nessa abordagem, grosso modo, divide-se o tempo em intervalos tão pequenos quanto se queira e o computador resolve o problema de controle (em geral, problema de controle ótimo) em cada intervalo ordenadamente, avançando no tempo desse modo.

## Capítulo II: Controlabilidade

### Introdução

Aqui nos questionaremos quanto à descrição de  $\mathcal{C}$  (ou de  $\mathcal{C}(t_1)$ ) e quanto à mudança de  $\mathcal{C}$  se mudarmos a classe de controle.

### Desenvolvimento

Esse primeiro teorema é importante pois garante que pequenas perturbações sobre o sistema em qualquer direção pode ser compensada por um controle correspondente.

**Teorema 1: 1**  $\vec{0} \in \text{int}(\mathcal{C}) \Leftrightarrow \mathcal{C}$  aberto

**Observação: 2** O teorema acima vale se admitirmos  $\dot{x} = f(x, u)$  com  $f$  contínuo em relação a  $x(0) = x_0$  e  $\mathcal{C}$  conexo por linhas.

### Demonstração: 3

1º :

$$\vec{0} \in \mathcal{C} \text{ pois se } x(0) = \vec{0} \therefore x(0) \in \mathcal{T} \text{ e } \vec{0} \in \mathcal{C}(t=0) \subset \mathcal{C}$$

Alem disso se  $\mathcal{C}$  aberto e  $\vec{0} \in \mathcal{C} \Rightarrow \vec{0} \in \text{int}(\mathcal{C})$  (por definição de conjuntos abertos)

2º :

supondo  $\exists \varepsilon > 0$  tal que  $B(\vec{0}, \varepsilon) \subset \mathcal{C}$  (isto e,  $\vec{0} \in \text{int}(\mathcal{C})$ )

$$\text{se } x_0 \in \mathcal{C} \Rightarrow \exists t_1 \text{ tq. } x(t_1; x_0, u(\cdot)) = \vec{0}$$

seja  $B(x_0, \delta)$  com  $\delta > 0$  suficientemente pequeno. Como  $f(x, u)$  e  $\mathcal{C}^0$  em relação a  $x$  e a  $u$  :

$x'_0 \in B(x_0, \delta)$  implica que

$$x_1 = x(t_1; x'_0, u(\cdot)) \in B(\vec{0}, \varepsilon).$$

Como  $B(\vec{0}, \varepsilon) \subset \text{int}(\mathcal{C})$ , então  $x_1 \in \mathcal{C}$

$$\Rightarrow \exists u^*(\cdot) \in \mathcal{U}_m \text{ tq. } x(t_2; x_1, u^*(\cdot)) = \vec{0}$$

Resumindo,  $\forall x_0 \in \mathcal{C} \exists \delta > 0$  tq.  $B(x_0, \delta) \subset \mathcal{C}$

$\Rightarrow \mathcal{C}$  aberto.

Em seqüência, mostramos que para a classe de problemas de controle lineares autônomos, o conjunto controlável é bem comportado, isto é, tem uma geometria favorável á resolução do problema. Em realidade as propriedades que serão mostradas para essa classe em particular de sistemas de controle podem ser estendidas para outras classes, mas a

demonstração requer recursos que ainda não foi explorado nesse texto. No terceiro capítulo faremos essa extensão.

**Teorema 2: 4** Para uma dinâmica descrita por um sistema de equações diferenciais lineares autônomas (LA):  $\mathcal{C}$  é simétrico e convexo.

**Demonstração: 5** Para entender isso devemos primeiro saber como é o formato da solução geral de um sistema desses:

$$\dot{\vec{x}} = A \cdot \vec{x} + B \cdot \vec{u}$$

A solução é:

$$x(t; x_0, u(\cdot)) = X(t) \cdot X^{-1}(0) \cdot x_0 + X(t) \cdot \int_0^t X^{-1}(s) \cdot B \cdot u(s) ds$$

$X(t)$ =matriz fundamental, cujas colunas formam base do espaço solução do sistema homogêneo associado (o sistema de equações diferenciais sem os termos de controle).

$$x_0 \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \exists t_1, \exists u(\cdot) / x(t_1; x_0, u(\cdot)) = \vec{0}$$

Pela forma da solução do sistema podemos inferir que a condição necessária e suficiente para isso ocorrer é

$$x_0 = -X(0) \cdot \int_0^{t_1} X^{-1}(s) \cdot B \cdot u(s) ds$$

Desse modo, se  $x_0 \in \mathcal{C}(t_1)$

$$\Rightarrow \exists u(\cdot) \text{ tq. } x_0 = -X(0) \cdot \int_0^{t_1} X^{-1}(s) \cdot B \cdot u(s) ds$$

$$\Rightarrow (-x_0) = +X(0) \cdot \int_0^{t_1} X^{-1}(s) \cdot B \cdot u(s) ds$$

$$= -X(0) \cdot \int_0^{t_1} X^{-1}(s) \cdot B \cdot (-u(s)) ds$$

$$\Rightarrow (-x_0) \in \mathcal{C}(t_1) \Rightarrow \mathcal{C} \text{ simétrico.}$$

$$\text{se } x_{01}, x_{02} \in \mathcal{C}(t_1) \Rightarrow$$

$$\frac{x_{01} + x_{02}}{2} = -X(0) \cdot \int_0^{t_1} X^{-1}(s) \cdot B \cdot \frac{u_1(s) + u_2(s)}{2} ds$$

Então  $\mathcal{C}(t_1)$  é convexo.

Mas se  $x_1 \in \mathcal{C}(t_1)$  e  $x_2 \in \mathcal{C}(t_2)$ ,  $t_2 > t_1$ ? Temos que  $x_1 \in \mathcal{C}(t_2)$ , pois

$$u_1(t) = \begin{cases} u_1(t), & 0 \leq t \leq t_1 \\ 0, & t_1 < t \leq t_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} \in \mathcal{C}(t_2) \subset \mathcal{C}$$

Então  $\mathcal{C}$  convexo.

**Observação: 6** Assumimos na demonstração que  $\Gamma = \{u(t); t \in \mathbb{R}_+ \text{ e } u(\cdot) \in U_m\}$  fosse convexo, simétrico e que  $\vec{0} \in \Gamma$ . Na realidade a condição suficiente para esse teorema é  $co(\Gamma)$  ser convexo, simétrico e  $\vec{0} \in co(\Gamma)$  ( $co(X)$  é o fecho convexo do conjunto  $X$ ). Isso se deve ao Princípio Bang-Bang, que será visto mais adiante.

Mostraremos agora um resultado mais prático para se estudar o conjunto controlável. Com o teorema seguinte poderemos realmente prever, usando cálculos, se o Target está no interior do conjunto controlável.

**Teorema 3: 7** Seja:

$$M = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$$

$$A = n \times n$$

$$B = n \times m$$

$$\text{Assim: } \text{posto}(M) = n \Leftrightarrow \vec{0} \in \text{int}(C)$$

**Demonstração: 8**

1º :

Supondo  $\text{posto}(M) < n$

$$\Rightarrow \exists h \in \mathbb{R}^n \text{ tq. } h^T \cdot A^{i-1} \cdot B = 0 \forall i \in 1, \dots, n$$

Seja o polinômio característico de A:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I)$$

Pelo teorema de Cayley-Hamilton a própria matriz A satisfaz seu polinômio característico:  $P(A) = \vec{0}$

$$\Rightarrow A^n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot A^{i-1}$$

se isolarmos  $A^n$  na equação do polinômio.

$$\Rightarrow A^n \cdot B = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot A^{i-1} \cdot B$$

$$\Rightarrow h^T \cdot A^n \cdot B = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot h^T \cdot A^{i-1} \cdot B = \sum \vec{0} = \vec{0}$$

Também:

$$\begin{aligned}
 A^n \cdot B &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot A^{i-1} \cdot B \\
 A^{n+1} \cdot B &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot A^i \cdot B \\
 h^T \cdot A^{n+1} \cdot B &= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \cdot h^T \cdot A^i \cdot B + h^T \cdot A^n \cdot B = \sum \bar{0} + h^T \cdot A^n \cdot B = \bar{0} \\
 &\Rightarrow h^T \cdot A^k \cdot B = \bar{0} \forall k \in \mathbb{N}. \\
 &\Rightarrow h^T \cdot e^{At} \cdot B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^T \cdot A^k \cdot t^k \cdot B}{k!} = \bar{0} \forall t \in \mathbb{R}_+. \\
 &\text{Se } x_0 \in C(t_1)
 \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned}
 x_0 &= -X(0) \cdot \int_0^{t_1} X^{-1}(s) \cdot B \cdot u(s) ds \\
 &= -\int_0^{t_1} e^{-As} \cdot B \cdot u(s) ds \\
 \Rightarrow h^T \cdot x_0 &= -\int_0^{t_1} h^T \cdot e^{-As} \cdot B \cdot u(s) ds = \bar{0} \Rightarrow h \perp x_0
 \end{aligned}$$

Assim  $\forall x_0 \in C(t_1)$ ,  $x_0 \in$  subespaço de dimensão menor que  $n$ , assim não existe  $\delta > 0$  tal que  $B(\bar{0}, \delta) \subset C(t_1) \Rightarrow \bar{0} \notin \text{int}C(t_1)$ .

Do mesmo modo,  $\forall t \in \mathbb{R}_+, \bar{0} \notin \text{int}C(t)$ .

$$\therefore \bar{0} \notin \text{int}(C)$$

2º :

Supondo  $\bar{0} \notin \text{int}(C)$

$$\begin{aligned}
 \exists h \neq \bar{0} \text{ tq. } \forall x_0 \in C \\
 \langle h, x_0 \rangle &= 0 \\
 \Rightarrow \text{para } t \in [0, t_1], \int_0^{t_1} -h^T \cdot e^{-As} \cdot B \cdot u(s) ds &= 0 \\
 \Rightarrow h^T \cdot e^{-As} \cdot B &\equiv 0 \text{ no intervalo } t \in [0, t_1]
 \end{aligned}$$

Pois se em algum intervalo  $I \subset [0, t_1]$   $h^T \cdot e^{-As} \cdot B \neq 0$ , então existiria  $u(\cdot)$  tq.  $h^T \cdot e^{-As} \cdot B \cdot u(s) \neq 0$ . Seria simplesmente:  $u_i(t) = \text{sgn}(h^T \cdot e^{-At} \cdot B)_i$ .

Como consequência da equação **Erreur ! Source du renvoi introuvable.**:

Para  $t = 0$ :  $h^T \cdot B = 0$

Se diferenciarmos:  $h^T \cdot A \cdot e^{-At} \cdot B \equiv 0$

Em  $t = 0$  teremos  $h^T \cdot A \cdot B = 0$ .

E assim por diante:  $h^T \cdot A^k \cdot B = 0, k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \text{posto}(M) < n$ , pois  $\exists h \neq \vec{0}$  ortogonal a todas as colunas de  $M$ .

**Observação: 9** Controlabilidade independe da base:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Se  $y = P \cdot x$  e  $w = Q \cdot u$ , com  $P$  e  $Q$  não singulares.

$$P^{-1} \dot{y} = AP^{-1}y + BQ^{-1}w$$

$$\dot{y} = PAP^{-1}y + PBQ^{-1}w$$

$$\text{posto}(M') = \text{posto}[PBQ^{-1}, PAP^{-1}PBQ^{-1}, \dots, PA^{n-1}P^{-1}PBQ^{-1}] =$$

$$\text{posto}(P[B, AB, \dots, A^{n-1}B]Q^{-1}) = \text{posto}[A, AB, \dots, A^{n-1}B] = \text{posto}(M)$$

Ou seja, a dimensão do espaço controlável é o mesmo em ambos os sistemas de coordenadas. Assim, uma mudança de coordenadas mantém a natureza do conjunto controlável.

Os próximos teoremas dizem respeito à estabilidade de um sistema, ou seja, em que condições a atuação das variáveis de controle é suficiente para dirigir as variáveis de estado para o Target.

Uma analogia boa é a seguinte: alguém tenta empurrar uma pedra pesada morro acima. Se esse morro tem forma de parabolóide côncavo, quanto mais afastada do cume a pessoa começar a empurrar a pedra mais difícil será. Se a pessoa começar de um ponto suficientemente afastado, ela não terá força necessária para empurrar a pedra.

**Teorema 4: 10** Consideremos o sistema linear autônomo (LA), supondo  $\text{posto}(M) = n$ . Se  $\text{Re}(\lambda) < 0$  para todo  $\lambda$  autovalor de  $A$ , então  $\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$ .

**Demonstração: 11** Como  $\text{posto}(M) = n \exists \delta > 0$  tq.  $B(\vec{0}, \delta) \subset \mathcal{C}$ .

Usando  $u(t) \equiv \vec{0}$  o sistema  $\dot{x} = Ax$  é assintoticamente estável, pois  $\text{Re}(\lambda) < 0$  para todo  $\lambda$ . Desse modo  $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \exists t \in \mathbb{R}_+$  tq.  $x(t; x_0, \vec{0}) \in B(\vec{0}, \delta)$ , ou seja, existirá controle bem sucedido. Como isso vale para qualquer  $\delta > 0$ ,  $\mathbb{R}^n \subset \mathcal{C} \Rightarrow \mathbb{R}^n = \mathcal{C}$ .

**Teorema 5: 12**

Consideremos, novamente (LA).

$$\mathcal{C} = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \text{posto}(M) = n \text{ e } \text{Re}(\lambda) \leq 0 \text{ para todo autovalor } \lambda \text{ de } A.$$

**Demonstração: 13** 1º :

Se  $\text{posto}(M) = n$  e  $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0 \forall i \in 1, \dots, n$ .

Supomos que  $\exists \vec{b} \neq \vec{0}$  e  $\alpha > 0$  tal que  $\langle x_0, \vec{b} \rangle \leq \alpha, \forall x_0 \in C$ . Tentaremos achar uma contradição, já que essa suposição significa que o conjunto controlável é limitado por um hiperplano.

$$x_0 \in C \Rightarrow \exists t_1 \text{ e } \exists u(\cdot) \text{ tq. } x_0 = -\int_0^{t_1} e^{-As} \cdot B \cdot u(s) ds$$

$$b^T \cdot x_0 = -\int_0^{t_1} b^T \cdot e^{-As} \cdot B \cdot u(s) ds \leq \alpha$$

O que tentaremos mostrar, no fim, é que:

$$\limsup_{t_1 \rightarrow \infty} \left\{ -\int_0^{t_1} b^T \cdot e^{-As} \cdot B \cdot u(s) ds; u(\cdot) \in U_m \right\} = \infty$$

Chamaremos  $\vec{v}(t) = b^T e^{-At} B$ .

Se  $u_i(t) = -\text{sgn}(v_i(t))$  temos esse valor máximo:

$$b^T x_0 = \sup \left\{ -\int_0^{t_1} b^T \cdot e^{-As} \cdot B \cdot u(s) ds; u(\cdot) \in U_m \right\} = +\int_0^{t_1} \sum_{i=1}^m |v_i(s)| ds$$

Agora é só mostrar que  $\lim_{t_1 \rightarrow \infty} \int_0^{t_1} \sum_{i=1}^m |v_i(s)| ds = \infty$ . Para tal, vamos supor, ao contrário, que esse limite converge:

$$\lim_{t_1 \rightarrow \infty} \int_0^{t_1} \sum_{i=1}^m |v_i(s)| ds = L \in \mathbb{R}_+$$

Nesse caso, poderíamos construir uma função  $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\psi(t) = \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \int_t^{t_1} \sum_{i=1}^m |v_i(s)| ds, \text{ tq.}$$

$$\psi(0) = L \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0.$$

Derivando:

$$\begin{aligned}
 \dot{\psi}(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(t+h) - \psi(t)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lim_{t_1 \rightarrow \infty} \left( \int_{t+h}^{t_1} \sum_{i=1}^m |v_i(s)| ds - \int_t^{t_1} \sum_{i=1}^m |v_i(s)| ds \right)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_t^{t+h} \sum_{i=1}^m |v_i(s)| ds}{h} \\
 &= \sum_{i=1}^m |v_i(t)|
 \end{aligned}$$

Porém, ao mesmo tempo, aplicando o operador derivada a  $v(t)$  através do polinômio característico da matriz  $A$  teremos:

$$\begin{aligned}
 P(-D).v(t) &= P(-D)b^T e^{-At} B = b^T \cdot (P(-D)e^{-At}) \cdot B = b^T P(A)e^{-At} B = \vec{0} \\
 \Rightarrow P(-d/dt).v_i(t) &= 0 \forall i \in 1, \dots, m.
 \end{aligned}$$

Disso teremos  $m$  equações desinenciais lineares, as quais, por serem da forma do polinômio característico da matriz  $A$ , têm como solução uma combinação linear de termos  $p_i(t) \cdot e^{-\lambda_i t}$ , em que  $p_i(t)$  é um polinômio de grau no máximo  $n$ , e  $\lambda_i$  são os autovalores de  $A$ . Mas como  $Re(\lambda_i) \leq 0$  por hipótese, então  $-Re(\lambda_i) \geq 0$ , de modo que pelo menos para um  $i$   $-Re(\lambda_i) > 0$  e a solução correspondente  $p_i(t) \cdot e^{-\lambda_i t}$  explodirá para  $+\infty$  ou  $-\infty$ . Assim:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |v_i(t)| = +\infty \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m |v_i(t)| = +\infty$$

$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = +\infty \neq 0$ , o que é um absurdo pois contradiz a construção da função  $\psi$ .

Em conclusão dessa primeira parte da demonstração, se  $posto(M) = n$  e todos os autovalores de  $A$  forem  $\lambda_i \leq 0$ , então não existira nenhum hiperplano limitador do conjunto controlável. Assim  $C = \mathbb{R}^n$ .

2º :

Agora suporemos que  $posto(M) < n$  ou que  $\exists i$  tq.  $Re(\lambda_i) > 0$ .

Primeiro, se  $posto(M) < n$ , então, como já visto  $\exists \vec{h} \neq \vec{0}$  tq.  $\forall x_0 \in C, h^T x_0 = 0$

$\Rightarrow C \subset$  hiperplano ortogonal a  $h \Rightarrow C \neq \mathbb{R}^n$ .

Se  $Re(\lambda_i) > 0$  para algum  $i \in 1, \dots, n$ :

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= Ax + Bu \\
 A &= PJP^{-1} \text{ e } y = Px \\
 \Rightarrow \dot{y} &= PAP^{-1}y + PBu \\
 \Rightarrow \dot{y} &= Jy + PBu
 \end{aligned}$$

Onde  $J$  é a forma de Jordan da matriz  $A$ :

$$\left( \begin{array}{cccccc} J_1 & 0 & \dots\dots\dots & & & \\ 0 & J_2 & \dots\dots\dots & & & \\ 0 & 0 & \dots\dots\dots & & & \\ \dots & \dots & \dots & J_{n-1} & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & 0 & J_n & \end{array} \right) \text{ onde, } J_i = \left( \begin{array}{cccccc} \lambda_i & 1 & 0 & \dots\dots\dots & & \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots\dots\dots & & \\ 0 & 0 & \lambda_i & \dots\dots\dots & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \lambda_i & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda_i \end{array} \right)$$

$J_i$  tem tantas colunas quanto for a multiplicidade algébrica de  $\lambda_i$ .

Podemos tomar sem perda de generalidade que para  $i = n$   $Re(\lambda_i) > 0$ . Aí a última linha da forma de Jordan dá:

$$\dot{y}_n = \lambda_n y_n + w_i \text{ em que } w_i = \{PBu\}_i$$

Como estamos usando controles limitados  $|u_i| \leq k, k > 0$ , e conseqüentemente existirá  $\bar{k} > 0$  tal que  $|w_i| \leq \bar{k}$ . Se escolhermos uma posição inicial suficientemente longe do ponto de equilíbrio (o target) do sistema a instabilidade do mesmo fará com que não exista controle capaz de trazer as variáveis de estado de volta para o target, veja:

$$\begin{aligned} & \text{Para } Re(y_n) > \bar{k}/Re(\lambda_n): \\ & \dot{y}_n = \lambda_n y_n + w_n = \lambda_n (y_n - \bar{k}/\lambda_n) + w_n + \bar{k} \\ & \Rightarrow Re(\dot{y}_n) = Re(\lambda_n (y_n - \bar{k}/\lambda_n)) + Re(w_n + \bar{k}) > 0 \\ & \Rightarrow Re(\dot{y}_n(t)) > 0, \forall u(.) \in \mathcal{U}_m \\ & \Rightarrow Re(y_n(t)) > Re(y_n(0)) \Rightarrow \text{n\~{o} existe } t > 0 \text{ tq. } y_n(t) = 0 \\ & \Rightarrow \forall u(.) \in \mathcal{U}_m, y(t; y_0, u(.)) \neq \vec{0}, \forall t \in \mathbb{R}_+ \\ & \Rightarrow y_0 \notin \mathcal{C} |_{y_0} \Rightarrow x_0 \notin \mathcal{C} \end{aligned}$$

**Teorema (Bang-Bang Principle):14** *Se  $\Gamma \subset \mathcal{U}_m$  qualquer compacto  $\Rightarrow \mathcal{C}_\Gamma$  convexo e simétrico. E se  $co(\Gamma) = co(\Gamma')$   $\Rightarrow \mathcal{C}_\Gamma(t_1) = \mathcal{C}_{\Gamma'}(t_1) \forall t_1$*

Esse teorema tem como conseqüência que o conjunto controlável de uma classe de controle Bang-Bang (só permitido  $u_i(t) = 0$  ou  $= max$ ) é o mesmo da classe geral de controles. Isso por que a segunda situação equivale a  $\Gamma = [-max; max]^m$ , enquanto que a primeira equivale a  $\Gamma = \partial[-max; max]^m$ .

**Conclusão**

Fizemos então um estudo superficial dos principais aspectos sobre os conjuntos controláveis. Vimos quando tal conjunto tem características geométricas favoráveis. Depois abordamos cálculos que podemos fazer para prever o comportamento do conjunto.

### Capítulo III: Controles extremos

**Teorema 1: 15**  $K(t_1; x_0)$  é convexo, simétrico, compacto e contínuo em  $t$  e em  $x_0$  se  $\Gamma$  convexo, simétrico e compacto

**Demonstração: 16**

$$x(t; x_0, u(\cdot)) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} Bu(s) ds$$

Se  $x_1, x_2 \in K(t_1; x_0)$  com os controles  $u_1(\cdot)$  e  $u_2(\cdot)$ , respectivamente. Então:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{e^{At_1} x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-s)} Bu_1(s) ds + e^{At_1} x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-s)} Bu_2(s) ds}{2} \\ &= e^{At_1} x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-s)} B \frac{u_1(s) + u_2(s)}{2} ds \end{aligned}$$

Como  $\Gamma$  é convexo,

$$\begin{aligned} \frac{u_1(s) + u_2(s)}{2} &\in \Gamma \\ \Rightarrow x_3 &\in K(t_1; x_0) \end{aligned}$$

Provaremos, agora, a simetria do conjunto alcançável em relação a  $e^{At} \cdot x_0$ . No caso de  $x_0 = \vec{0}$ , essa simetria é em relação à origem.

Se  $e^{At_1} x_0 + x' \in K(t_1; x_0)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x' &= \int_0^{t_1} e^{A(t_1-s)} Bu'(s) ds \\ \Rightarrow e^{At_1} x_0 - x' &= e^{At_1} x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-s)} B(-u')(s) ds, \\ \Rightarrow e^{At_1} x_0 - x' &\in K(t_1; x_0) \end{aligned}$$

Repare a necessidade de simetria de  $\Gamma$  em relação à origem. Agora devemos mostrar que:

$$\forall \vec{h} \neq \vec{0} \exists \alpha > 0 \text{ tq. } \langle h, x(t) \rangle \leq \alpha, \forall t \in \mathbb{R} \text{ e } u(\cdot) \in \mathcal{U}_m$$

Ou seja, que para todo  $\vec{h}$  existe  $u^*(\cdot) \in \mathcal{U}_{BBPC}$  tal que

$$e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} Bu(s) ds = \max_{u(\cdot) \in \mathcal{U}_m} h^t x(t).$$

Isso será mostrado mais adiante no texto, mas usaremos esse fato como argumento aqui.

**Observação: 17**  $\mathcal{U}_{BBPC}$  é a classe de controle Bang-Bang piecewise constant, constante por partes e que só é admitida a assumir os valores 0 ou max.

Assim, se  $\max_{u(\cdot) \in \mathcal{U}_m} h^T x(t) = \alpha > 0$  e se  $x'$  é tal que  $h^T x' = \alpha$ . Supomos que existe

$\delta > 0$  tal que  $B_1(x', \delta) \subset K(t_1; x_0)$

Porém dado um vetor unitário na direção  $x' : \hat{x}'$

$$x' + \varepsilon \cdot \hat{x}' \in B_1, |\varepsilon| < 1$$

$$h^T \cdot (x' + \varepsilon \cdot \hat{x}') = h^T x' + h^T \cdot \frac{x'}{|x'|} > h^T x' = \alpha$$

O que é um absurdo, pois significa que  $(x' + \varepsilon \cdot \hat{x}') \notin K(t_1; x_0)$ , apesar de termos assumido que  $B_1 \subset K(t_1; x_0)$ . Concluimos, então, que não existe  $\delta$  tal que  $B_1(x', \delta) \subset K(t_1; x_0)$ . Logo, K é fechado e limitado.

Por fim, resta provar que K é contínuo com relação a t:

$$\psi : t \rightarrow K(t; x_0)$$

$$\text{Seja, } \psi(t_1) = K(t_1; x_0)$$

$$\psi(t_1 + \delta) = K(t_2; x_0)$$

$$\text{Dado } x(t_1; x_0, u'(\cdot)) = x_1$$

$$x(t_2; x_0, u'(\cdot)) = x_2$$

$$\text{tal que } u^*(t) = \begin{cases} u'(t), 0 \leq t < t_1 \\ u(t), t_1 \leq t \leq t_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \|x_2 - x_1\| \leq \sup_{u(\cdot) \in \mathcal{U}_m} \left\| e^{A(t_2-t_1)} x_1 + \int_{t_1}^{t_2} e^{A(t_2-s)} Bu(s) ds \right\| \leq$$

$$\leq \left\| e^{A(t_2-t_1)} x_1 \right\| + \sup_{u(\cdot) \in \mathcal{U}_m} \left\| \int_{t_1}^{t_2} e^{A(t_2-s)} Bu(s) ds \right\|$$

A soma acima é limitada, logo :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq. } t_2 \leq t_1 + \delta \therefore$$

$$\|x_2 - x_1\| \leq \left\| e^{A(t_2-t_1)} x_1 \right\| + \sup_{u(\cdot) \in \mathcal{U}_m} \left\| \int_{t_1}^{t_2} e^{A(t_2-s)} Bu(s) ds \right\| \leq \varepsilon$$

$$\text{Ou seja, } |t_2 - t_1| \leq \delta \Rightarrow \|x_2 - x_1\| \leq \varepsilon$$

$$\|K(t; x_0); K(t + \delta(\varepsilon, t); x_0)\|_H \leq \varepsilon, \text{ em que } \|\bullet\|_H \text{ é a métrica de Hausdorff}$$

$$\Rightarrow \psi(t) \text{ contínuo em t.}$$

**Teorema 2: 18**

$\exists u(\cdot) \in \mathcal{U}_m$  tq.  $x(t_1; x_0, u(\cdot)) = \bar{0} \Rightarrow$  existe controle ótimo de tempo.

**Observação: 19 20** A hipótese do teorema acima equivale à afirmação que existe um controle bem sucedido, ou seja, um controle que leve as variáveis de estado ao Target.

**Observação: 21** Controle ótimo de tempo é, se existir, um controle que leva as variáveis de estado ao Target em um tempo mínimo.

**Demonstração:**

22 1º Se  $\bar{0} \in \partial K(t_1; x_0)$ , então (em LA)

$$\bar{0} \notin K(t_1 - \delta; x_0) \forall \delta > 0 \text{ e}$$

$$\bar{0} \in K(t_1 + \delta; x_0) \forall \delta > 0$$

$\Rightarrow t_1$  é tempo ótimo, e o controle associado a ele é controle ótimo.

2º

Como  $\psi(t) = K(t; x_0)$  é contínuo em t e "crescente", ou seja,

$$K(t_2; x_0) \supset K(t_1; x_0) \text{ sse } t_2 \geq t_1,$$

E como  $\psi(0) = \{x_0\}$ . Se assumirmos  $\bar{0} \in \text{int}(K(t_1; x_0))$ :

$$\exists \delta > 0 \text{ tq. } \bar{0} \in \partial K(t_1 - \delta; x_0)$$

E, nesse caso,  $t = t_1 - \delta$  será tempo ótimo.

**Corolário: 23** Se há controle bem sucedido para  $x_0$ , então existe controle bang-bang por partes que seja ótimo no tempo.

**Demonstração: 24**  $K_{BBPC} = K$  (princípio Bang-Bang), assim a existência de  $u(\cdot)$  ótimo em  $\mathcal{U}_m$  implica na existência de  $u(\cdot)$  ótimo  $\in \mathcal{U}_{BBPC}$ .

Façamos uma pausa para definir controles extremos.

**Definição: 25** Controles extremos são controles que fazem as variáveis de estado pertencer em cada instante à fronteira do conjunto  $K(t)$ . Em linguagem matemática:

$$u(\cdot) \in \mathcal{U}_m \text{ extremo para } x_0 \Leftrightarrow \forall t > 0, x(t; x_0, u(\cdot)) \in \partial K(t; x_0)$$

**Teorema 3: 26**  $u(\cdot)$  é controle ótimo  $\Rightarrow u(\cdot)$  é extremo.

**Demonstração: 27** Se o tempo ótimo é  $t_1$  e o Target for a origem, então existe  $u'(\cdot)$  tal que:

$$x(t_1; x_0, u'(\cdot)) = \bar{0}$$

1º

Primeiramente mostremos que  $\bar{0} \in \partial K(t_1; x_0)$ .

Supomos que não, ou seja, supomos que  $\bar{0} \in \text{int}(K(t_1; x_0))$

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 \text{ tq. } \bar{0} \in \text{int}(K(t_1 - \delta; x_0))$$

Já que  $\psi(t) = K(y; x_0)$  é contínuo.

Desse modo,  $t_1$  não seria ótimo, pois existiria controle bem sucedido em  $t_1 - \delta$ . Mas isso é um absurdo pois contradiz a hipótese. Concluimos que  $\bar{0} \in \partial K(t_1; x_0)$

Falta provar que  $x(t; x_0, u'(\cdot)) \in \partial K(t; x_0) \forall 0 \leq t < t_1$ .

Supondo que  $x^* = x(t^*; x_0, u'(\cdot)) \in \text{int}(K(t^*; x_0))$  para algum  $t^* \in [0, t_1)$

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 \text{ tq. } B(x^*, \delta) \subset K(t^*, x_0)$$

A função

$$\phi: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\phi(x, t) = e^{At} x^* + \int_t^{t_1} e^{A(t-s)} B u'(s) ds$$

É injetiva, logo leva bolas abertas em conjuntos abertos.

$$\phi(B(x^*, \delta), t_1) = N \text{ aberto} \Rightarrow \phi(x^*, t_1) = \bar{0} \in \text{int}(N) \subset K(t_1, x_0)$$

$$\Rightarrow \bar{0} \in \text{int}(K(t_1, x_0))$$

O que é absurdo pois já mostramos que  $\bar{0} \in \partial K(t_1, x_0)$

Assim, nos resta que:

$$\forall 0 \leq t \leq t_1, x(t; x_0, u'(\cdot)) \in \partial K(t, x_0)$$

**Observação: 28 29** Da demonstração pode-se perceber que as variáveis de estado pertencerem à fronteira do conjunto alcançável em um determinado instante é condição suficiente para que pertençam à fronteira do conjunto alcançável em todos instantes precedentes.

**Teorema 4: 30** Em LA:

$u(\cdot)$  é extremo

$\Leftrightarrow$

$$\exists \vec{h} \neq \vec{0} \text{ tq. } h^T e^{-At} B u(t) = \max_{v \in \Gamma} \{h^T e^{-At} B v\} \forall t > 0$$

$$E u^i(t) = k \cdot \text{sgn}\{h^T e^{-At} B\}_i.$$

**Demonstração: 31**

1º Se  $u(\cdot)$  é extremo, então

$$\forall t, x(t; x_0, u(\cdot)) \in \partial K(t; x_0)$$

Como já foi mostrado.

Também sabemos que  $K(t; x_0)$  é convexo e compacto. Assim:

$$\forall \vec{n} \neq \vec{0} \exists \alpha > 0 \text{ tq. } \forall x \in K(t; x_0), n^T (x - e^{At} x_0) \leq \alpha$$

Sendo  $n^T (x - e^{At} x_0) \leq \alpha$  o hiperplano que tangencia  $K(t; x_0)$  em  $q = x(t; x_0, u(\cdot))$ , então

$$n^T (q - e^{At} x_0) = \max \{n^T (x - e^{At} x_0); x \in K(t; x_0)\} = \alpha$$

$$n^T \int_0^t e^{A(t-s)} B u(s) ds = \max_{v \in \Gamma} \left\{ n^T \int_0^t e^{A(t-s)} B v(s) ds \right\}$$

Fazendo  $h^T = n^T e^{At} \neq \vec{0}$  ( $\det(e^{At}) \neq 0$ )

$$\int_0^t h^T e^{-As} B u(s) ds = \int_0^t \sum_{i=1}^m (h^T e^{-As} B)_i u_i(s) ds$$

Para ter-se o valor máximo, considerando  $\Gamma$  como sendo hipercubo:

$$u_i(s) = k \cdot \text{sgn}\{h^T e^{-As} B\}_i$$

$$\Rightarrow \alpha = \int_0^t \sum_{i=1}^m |h^T e^{-As} B)_i| ds$$

2º

Agora tomando  $u(\cdot)$  tal que  $u_i(s) = k \cdot \text{sgn}\{h^T e^{-As} B\}_i$  para algum  $\vec{h} \neq \vec{0}$ , mostrar-se-á que  $u(\cdot)$  é extremo.

Fazendo  $h^T = n^T e^{At}$

$$\begin{aligned}
 x(t) &= e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} B u(s) ds \\
 n^T x(t) &= n^T e^{At} x_0 + \int_0^t n^T e^{At} e^{-As} B u(s) ds \\
 &= h^T x_0 + \int_0^t h^T e^{-As} B u(s) ds \\
 &= h^T x_0 + \int_0^t \sum_{i=1}^m (h^T e^{-As} B)_i u_i(s) ds
 \end{aligned}$$

Mas, por hipótese  $u_i(s) = k \cdot \text{sgn}\{h^T e^{-As} B\}_i$ . Assim

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^m (h^T e^{-As} B)_i u_i(s) &= \sum_{i=1}^m |(h^T e^{-As} B)_i| = \max \forall s > 0 \\
 &\Rightarrow \int_0^t h^T e^{-As} B u(s) ds = \max_{v \in \Gamma} \left\{ \int_0^t h^T e^{-As} B v(s) ds \right\} \\
 \Rightarrow n^T (x(t; x_0, u(\cdot)) - e^{At} x_0) &= \max \{ n^T (x - e^{At} x_0); x \in K(t; x_0) \}
 \end{aligned}$$

Como  $K(t; x_0)$  é compacto e convexo

$$\begin{aligned}
 \forall x \in K(t; x_0), n^T (x - e^{At} x_0) &\leq \alpha = n^T (x(t; x_0, u(\cdot)) - e^{At} x_0) \\
 &\Rightarrow x(t; x_0, u(\cdot)) \in \partial K(t; x_0)
 \end{aligned}$$

**Definição: (Normalidade) 32** Um sistema normal é aquele no qual para qualquer  $\bar{h} \neq \bar{0}$   $(h^T e^{-At} B)_i \neq 0$  quase sempre  $\forall i = 1, \dots, m$ , ou seja,  $\mathbb{X}_i = \{t \in \mathbb{R}; (h^T e^{-At} B)_i = 0\}$  é enumerável.

**Teorema 5: 33** Se um sistema é normal e  $\exists u(\cdot)$  bem sucedido  $\Rightarrow \exists ! u^*(\cdot)$  ótimo,  $u^*(\cdot) \in \mathcal{U}_{BBPC}$

**Demonstração: 34** Se existe controle bem sucedido, existe controle ótimo (consequência do teorema 2). Além disso, se o sistema é normal, o controle ótimo é "Bang-Bang piecewise constant", por construção.

A unicidade vem do fato que se  $u_1(\cdot) \neq u_2(\cdot)$  são ótimos ( $\in \mathcal{U}_{BBPC}$ ), logo

$u_3(\cdot) = \frac{u_1 + u_2}{2}(\cdot)$  também será ótimo, pois levará ao Target no mesmo tempo. O problema é que sendo  $u_1(\cdot) \neq u_2(\cdot)$ , necessariamente  $u_3(\cdot) \notin \mathcal{U}_{BBPC}$ , o que contradiz a construção de um controle ótimo.

Assim, por contradição,  $u_1(\cdot) = u_2(\cdot)$ .

Diremos que um sistema admite controle único se e somente se para todo estado  $\bar{y} \in \mathbb{R}$  e tempo  $t_1$  existir um único controle que leve as variáveis de estado para  $\bar{y}$  no instante  $t_1$ .

Também se define que um sistema admite caminho único se e somente se para cada  $\bar{y} \in \mathbb{R}$  e tempo  $t_1$ , a afirmação  $x(t_1; x_0, u_1(\cdot)) = x(t_1; x_0, u_2(\cdot)) = \bar{y}$  implicar que  $x(t; x_0, u_1(\cdot)) = x(t; x_0, u_2(\cdot)) \forall t \in [0; t_1]$

Introduz-se, em seguida, um teorema que relaciona diretamente esses dois conceitos.

**Lema: 35** *UM sistema admite controle único  $\Leftrightarrow$  admite caminho único*

**Demonstração: 36**

1º Assumindo que o sistema admite controle único

$$\begin{aligned} \exists! u(\cdot) \in \mathcal{U}_m \text{ tq. } y &= x(t_1; x_0, u(\cdot)) \\ \forall v(\cdot) \in \mathcal{U}_m \text{ tq. } x(t_1; x_0, v(\cdot)) &= y \Rightarrow v(\cdot) = u(\cdot) \\ \Rightarrow x(t; x_0, v(\cdot)) &= x(t; x_0, u(\cdot)) \forall t \in [0; t_1] \end{aligned}$$

2º Assumindo, por absurdo, que o sistema não admite controle único, mas que admite caminho único

$$\begin{aligned} \exists u_1(\cdot), u_2(\cdot) \in \mathcal{U}_m; u_1(\cdot) \neq u_2(\cdot) \text{ tq. } x(t; x_0, u_1(\cdot)) &= x(t; x_0, u_2(\cdot)) \forall t \in [0; t_1] \\ \Rightarrow x(t_1; x_0, u_1(\cdot)) &= x(t_1; x_0, u_2(\cdot)) \end{aligned}$$

Constrói-se  $u_0(\cdot) = \frac{u_1 + u_2}{2}(\cdot)$ . Como já mencionado, é impossível que  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_0$  sejam simultaneamente "Bang-Bang Piecewise constant". Supõe-se, sem perda de generalidade que  $u_1(\cdot) \notin \mathcal{U}_{BBPC}$

$$\exists i \in 1, \dots, m \text{ e } N \text{ (intervalo) tq. } |u_1^i(t)| < k, t \in N$$

Pelo princípio Bang-Bang,  $\exists v(\cdot) \in \mathcal{U}_{BBPC}$  tal que  $x(t_1; x_0, v(\cdot)) = x(t_1; x_0, u_1(\cdot))$ . Por outro lado, o sistema admite caminho único, o que implica que

$$\begin{aligned} x(t; x_0, v(\cdot)) &= x(t; x_0, u_1(\cdot)), \forall t \in [0; t_1] \\ e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} B v(s) ds &= e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} B u_1(s) ds, \forall t \in [0; t_1] \\ \int_0^t e^{A(t-s)} B v(s) ds &= \int_0^t e^{A(t-s)} B u_1(s) ds, \forall t \in [0; t_1] \\ \int_I e^{A(t-s)} B v(s) ds &= \int_I e^{A(t-s)} B u_1(s) ds, \forall I \subset [0; t_1] \\ \int_{I \subset N} e^{A(t-s)} B v(s) ds &= \int_{I \subset N} e^{A(t-s)} B u_1(s) ds, \forall I \subset N \\ \Rightarrow \int_{I \subset N} e^{A(t-s)} B (v(s) - u_1(s)) ds &= 0, \forall I \subset N \end{aligned}$$

Como a igualdade vale para todo subintervalo de N e como  $e^{-As}$  é não-singular

$$\int_{I \subset N} e^{A(t-s)} B (v(s) - u_1(s)) ds = 0, \forall I \subset N \Leftrightarrow B \cdot (u_1(t) - v(t)) \equiv \vec{0}, t \in I \subset N$$

Lembrando que  $|u_1^i(t)| < k, t \in N$  e que  $|u_1^j(t)| < k, se j \neq i$ .

$$B \cdot (u_1(t) - v(t)) = \sum_i \vec{b}_i \cdot (u_1^i(t) - v^i(t)) \equiv \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{b}_i = \vec{0}, \text{ pois consideramos qualquer } t$$

Mas isso significa que as  $i$ -ésimas variáveis de controle em nada atuam no sistema, o que é absurdo.

Em conclusão, o sistema admitir caminho único, implica que ele admite controle único.

Antes de se prosseguir, precisa-se definir o conceito geométrico de ponto extremo de um conjunto em  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição: 37** Um ponto de um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  é dito extremo, se e somente se ele não está entre nenhum par de pontos do conjunto, ou seja, ele não pode ser escrito como combinação convexa de nenhum par de pontos do conjunto

$$y \in A \subset \mathbb{R}^n \text{ ponto extremo} \equiv \forall y_1, y_2 \in A, y \neq \frac{y_1 + y_2}{2}$$

**Teorema 6: 38**

$$y = x(t_1; x_0, u(.)), u(.) \text{ único} \Leftrightarrow y \text{ extremo de } K(t_1; x_0)$$

**Demonstração: 39**

1º, se  $y$  não extremo de  $K(t_1; x_0)$

$$\Rightarrow \exists y_1, y_2 \in K(t_1; x_0) \text{ e } y_1 \neq y_2 \text{ tq. } y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

E pelo princípio Bang-Bang:

$$\exists u_1(.), u_2(.) \in \mathcal{U}_{BBPC}$$

$$\text{tq. } y_1 = x(t_1; x_0, u_1(.)), y_2 = x(t_1; x_0, u_2(.))$$

$$\Rightarrow y = x(t_1; x_0, \frac{u_1 + u_2}{2}(.))$$

Porém,  $\frac{u_1 + u_2}{2}(. ) \notin \mathcal{U}_{BBPC}$ , pois  $u_1(.) \neq u_2(.)$  ( $y_1 \neq y_2$ ).

E, novamente devido ao princípio Bang-Bang,

$$\exists v(.) \in \mathcal{U}_{BBPC}, \text{ tq. } y = x(t_1; x_0, v(.))$$

$$\text{mas, } v(.) \neq \frac{u_1 + u_2}{2}(. ) = u^*(.)$$

Ou seja, conclui-se que o controle não é único.

**Observação: 40** O lema que precede o teorema garante que os controles  $v(\cdot)$  e  $u^*(\cdot)$  levam, as variáveis de estado por caminhos diferentes a  $y$

2º se  $u(\cdot)$  não único

$$y = x(t_1; x_0, u_1(\cdot)) = x(t_1; x_0, u_2(\cdot)), u_1(\cdot) \neq u_2(\cdot)$$

Pelo lema, os caminhos não são o mesmo

$$\exists t_* \in [0; t_1], \text{ tq. } x(t_*; x_0, u_1(\cdot)) = x_1 \neq x_2 = x(t_*; x_0, u_2(\cdot))$$

Podemos construir os controles:

$$v_1(t) = \begin{cases} u_1(t), & 0 \leq t \leq t_* \\ u_2(t), & t_* \leq t \leq t_1 \end{cases}$$

$$v_2(t) = \begin{cases} u_2(t), & 0 \leq t \leq t_* \\ u_1(t), & t_* \leq t \leq t_1 \end{cases}$$

Usando a estratégia  $v_1(\cdot)$ :

$$\begin{aligned} x(t_1; x_0, v_1(\cdot)) &= e^{At_1} x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-s)} B v_1(s) ds \\ &= e^{At_1} x_0 + \int_0^{t_*} e^{A(t_1-s)} B u_1(s) ds + \int_{t_*}^{t_1} e^{A(t_1-s)} B u_2(s) ds \\ &= \int_0^{t_*} e^{A(t_1-s)} B u_1(s) ds + e^{At_1} x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-s)} B u_2(s) ds - \int_0^{t_*} e^{A(t_1-s)} B u_2(s) ds \\ &= \int_0^{t_*} e^{A(t_1-s)} B u_1(s) ds + y - \int_0^{t_*} e^{A(t_1-s)} B u_2(s) ds \\ &= y + e^{A(t_1-t_*)} \left\{ \int_0^{t_*} e^{A(t_*-s)} B u_1(s) ds - \int_0^{t_*} e^{A(t_*-s)} B u_2(s) ds \right\} \\ &= y + e^{A(t_1-t_*)} \left\{ x_1 - e^{At_*} x_0 - (x_2 - e^{At_*} x_0) \right\} \\ &= y + e^{A(t_1-t_*)} (x_1 - x_2) \end{aligned}$$

Por analogia, usando a estratégia  $v_2(\cdot)$  teríamos

$$x(t_1; x_0, v_2(\cdot)) = y + e^{A(t_1-t_*)} (x_2 - x_1)$$

Define-se  $x(t_1; x_0, v_1(\cdot)) = y_1$  e  $x(t_1; x_0, v_2(\cdot)) = y_2$ , e torna-se visível que  $y$  não é extremo de  $K(t_1; x_0)$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{y + e^{A(t_1-t_*)} (x_1 - x_2) + y + e^{A(t_1-t_*)} (x_2 - x_1)}{2} = y$$

**Teorema 7: 41** Um sistema é normal se e somente se  $K(t; x_0)$  é estritamente convexo

**Demonstração : 42**

1º Se  $K(t; x_0)$  não for estritamente convexo

Então existirá  $y \in \partial K(t; x_0)$  não extremo. Pelo teorema 6, isso implica que o controle não é único para esse ponto. A existência de mais de um controle extremo (ótimo) implica na não normalidade do sistema, já que um sistema normal admite controle ótimo único.

2º Se o sistema for não normal.

Supor  $\{h^T e^{-At} B\}_i \equiv 0$  para  $0 \leq t \leq t_1$ . Podemos construir duas estratégias diferentes de controle  $u(\cdot)$  e  $v(\cdot)$

$$u_j(t) = \begin{cases} k \cdot \text{sgn}\{h^T e^{-At} B\}_j, & \text{se } j \neq i \\ l, & j = i \end{cases}$$

$$v_j(t) = \begin{cases} k \cdot \text{sgn}\{h^T e^{-At} B\}_j, & \text{se } j \neq i \\ m, & j = i \end{cases}$$

E definindo  $n^T = h^T e^{-At}$

$$\begin{aligned} n^T x(t_1; x_0, u(\cdot)) &= n^T e^{At} x_0 + n^T \int_0^t e^{A(t-s)} B u(s) ds \\ &= n^T e^{At} x_0 + \int_0^t h^T e^{-As} B u(s) ds \\ &= n^T e^{At} x_0 + \int_0^t \sum \{h^T e^{-As} B\}_i u_i(s) ds \\ &= n^T e^{At} x_0 + \int_0^t \sum |h^T e^{-As} B|_i ds \\ &= n^T e^{At} x_0 + \int_0^t \sum \{h^T e^{-As} B\}_i v_i(s) ds \\ &= n^T e^{At} x_0 + \int_0^t h^T e^{-As} B v(s) ds \\ &= n^T x(t_1; x_0, v(\cdot)) \end{aligned}$$

Ou seja, com ambas as estratégias as variáveis de estado andarão num mesmo hiperplano.

Porém, como  $u_i(t) \neq v_i(t)$  e

$$\begin{aligned} e^{-At} B &= [\bar{a}_1 \mid \bar{a}_2 \mid \dots \mid \bar{a}_m], \bar{a}_i \neq \vec{0} \forall i \\ \int_0^t e^{-As} B u(s) ds &\neq \int_0^t e^{-As} B v(s) ds \\ \Rightarrow x(t_1; x_0, u(\cdot)) &= x_1 \neq x_2 = x(t_1; x_0, v(\cdot)) \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} x_1, x_2 &\in \langle n, x \rangle = \alpha > 0 \\ \Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} &\in \langle n, x \rangle = \alpha \end{aligned}$$

Ou seja,  $K(t_1; x_0)$  não é estritamente convexo pois todos os pontos gerados por combinação convexa entre  $x_1$  e  $x_2$  pertencerão ao  $K(t_1; x_0)$  e ao mesmo tempo pertencerão ao hiperplano afim  $\langle n, x \rangle = \alpha$ .

**Observação: 43** Se estivéssemos usando  $u_i(t)$  e  $v_i(t)$  não constantes poderíamos ter  $x_1 = x_2$  devido ao cálculo integral

**Teorema 8: 44**

Sistema é normal  $\Leftrightarrow N_j = [\vec{b}_j \mid A\vec{b}_j \mid \dots \mid A^{n-1}\vec{b}_j]$  não singular,  $\forall j = 1, \dots, m$

**Demonstração: 45**

1º Primeiramente, consideramos  $N_j$  singular para algum  $j$ , ou seja, com posto menor que  $n$  ( $N_j$  é matriz  $n$  por  $n$ ). Nesse caso, existe  $\vec{h} \neq \vec{0}$  tal que

$$h^T A^{i-1} \vec{b}_j = \vec{0}, \forall i = 1, \dots, n$$

Pelo teorema de Cayley-Hamilton,  $A$  satisfaz seu próprio polinômio característico

$$\begin{aligned} \wp(A) &= 0 \\ \Rightarrow A^n &= \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i A^i \\ \therefore A^n \vec{b}_j &= \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i A^i \vec{b}_j \\ \therefore h^T A^n \vec{b}_j &= \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i h^T A^i \vec{b}_j = \vec{0} \end{aligned}$$

E podemos expandir para potências maiores de  $A$

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i A^i \\ \Rightarrow A^{n+1} &= \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i A^{i+1} \\ \Rightarrow A^{n+1} \vec{b}_j &= \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i A^{i+1} \vec{b}_j \\ \Rightarrow h^T A^{n+1} \vec{b}_j &= \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i h^T A^{i+1} \vec{b}_j = h^T A^n \vec{b}_j + \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i h^T A^{i+1} \vec{b}_j \\ &= \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \end{aligned}$$

Por indução finita podemos inferir que

$$h^T A^k \vec{b}_j = 0, \forall k \in \mathbb{N}, \forall j = 1, \dots, m$$

Esse resultado torna trivial o cálculo da matriz exponencial de A

$$\begin{aligned} h^T e^{-At} \vec{b}_j &= h^T \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-t)^i A^i}{i!} \right\} \vec{b}_j = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-t)^i h^T A^i \vec{b}_j}{i!} \right\} = 0 \\ &\Rightarrow \{h^T e^{-At} B\}_j = h^T e^{-At} \vec{b}_j = 0 \\ &\Rightarrow \text{sistema não e' normal} \end{aligned}$$

2º Se o sistema não for normal, existe  $I = [0; t_*]$  tal que  $\{h^T e^{-At} B\}_j \equiv 0$  para algum j  
Seja:

$$\begin{aligned} \psi: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \psi(t) &= \{h^T e^{-At} B\}_j = h^T e^{-At} \vec{b}_j \end{aligned}$$

Como  $\psi(t) \equiv 0 \forall t \in I$ :

$$\begin{aligned} \psi(0) &= h^T \vec{b}_j = 0 \\ e \dot{\psi}(0) &= \ddot{\psi}(0) = \psi^{(3)}(0) = \dots = \psi^{(n-1)}(0) = 0 \\ \dot{\psi}(t) &= -h^T A e^{-At} \vec{b}_j \therefore \dot{\psi}(0) = -h^T A \vec{b}_j = 0 \\ \ddot{\psi}(t) &= +h^T A^2 e^{-At} \vec{b}_j \therefore \ddot{\psi}(0) = +h^T A^2 \vec{b}_j = 0 \\ &\dots \\ \psi^{(n-1)}(t) &= (-1)^{n-1} h^T A^{n-1} e^{-At} \vec{b}_j \therefore \psi^{(n-1)}(0) = (-1)^{n-1} h^T A^{n-1} \vec{b}_j = 0 \end{aligned}$$

Assim,  $\vec{h} \perp \text{ger}\{\vec{b}_j | A\vec{b}_j | \dots | A^{n-1}\vec{b}_j\}$

$$N_j = [\vec{b}_j | A\vec{b}_j | \dots | A^{n-1}\vec{b}_j] \text{ e' singular}$$

Esse teorema possibilita-nos fazer uma lembrança do estudo do conjunto controlável.  
Para tal relembremos a matriz M

$$\begin{aligned} M &= [B | AB | \dots | A^{n-1}B] \\ &= [\vec{b}_1 | \dots | \vec{b}_m | A\vec{b}_1 | \dots | A\vec{b}_m | \dots | A^{n-1}\vec{b}_1 | \dots | A^{n-1}\vec{b}_m] \end{aligned}$$

Podemos reorganizar as colunas da matriz M que o posto permanece inalterado  
 $\text{posto}(M) = \text{posto}(\bar{M})$

$$\begin{aligned} &= \text{posto}([\vec{b}_1 | A\vec{b}_1 | \dots | A^{n-1}\vec{b}_1 | \vec{b}_2 | A\vec{b}_2 | \dots | A^{n-1}\vec{b}_2 | \dots | \vec{b}_m | \dots | A^{n-1}\vec{b}_m]) \\ &= \text{posto}([N_1 | N_2 | \dots | N_{n-1}]) \end{aligned}$$

Conclui-se que o posto de M deficiente se e somente se o posto de  $N_j$  menor que n para todo j. Mas pela demonstração do teorema 8 isso significa que todas as componentes de controle  $u(\cdot)$  podem assumir qualquer valor do hiperplano  $\Gamma = [-k; k]^n$  que as variáveis de estado pertencerão a um mesmo hiperplano.

$$\begin{aligned}
 n^T x(t_1; x_0, u(\cdot)) &= n^T e^{At} x_0 + \int_0^t h^T e^{-As} B u(s) ds \\
 &= n^T e^{At} x_0 + \int_0^t \sum \{h^T e^{-As} B\}_i u_i(s) ds \\
 &= n^T e^{At} x_0 + \int_0^t \sum h^T e^{-As} \vec{b}_i u_i(s) ds = n^T e^{At} x_0 + \vec{0}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \langle n; x \rangle &= n^T e^{-At} x_0 = \alpha(t; x_0) \\
 \Rightarrow n^T (x(t) - e^{-At} x_0) &= 0, \forall t \in [0; t_1]
 \end{aligned}$$

Ou seja o movimento fica restrito a um hiperplano que é transladado em cada instante (por isso a notação  $\alpha(t; x_0)$ ). Esse resultado é análogo ao obtido para o conjunto controlável no capítulo **controlabilidade** teorema 3.

Deve-se, então, ressaltar o cuidado que se há de ter ao afirmar que um controle é extremo. Com o que acabou de ser visto o teorema 4 ficaria invalidado pois existiria  $\vec{n} \neq \vec{0}$  tal que todo controle satisfaria a condição de maximalidade; por outro lado se levamos em consideração a geometria de  $K(t; x_0)$  esse problema fica dissipado e enunciaríamos o teorema 4 assim:

**Teorema 4 (generalizado) 46 Em LA:**

$u(\cdot)$  é extremo

$\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}
 \exists \vec{h} \neq \vec{0} \vec{h} \notin \ker(M) \text{ tq. } h^T e^{-At} B u(t) &= \max_{v \in \Gamma} \{h^T e^{-At} B v\} \forall t > 0 \\
 E u^i(t) &= k \cdot \text{sgn}\{h^T e^{-At} B\}_i.
 \end{aligned}$$

Além disso, o teorema 8 mostra que se pelo menos para um valor  $i \in \{1, \dots, m\}$  e para um vetor  $\vec{h} \neq \vec{0}$   $\{h^T e^{-At} B\}_i = 0$ , então poderemos mudar arbitrariamente a  $i$ -ésima componente de  $u(\cdot)$  extremo que continuaremos tendo controle extremo. O novo controle obtido levará as variáveis de estado a um ponto diferente, porém no mesmo hiperplano.

O problema surge se o conjunto  $\hat{K}(t; x_0) = \{y = x(t; x_0, u(\cdot)) - e^{-At} x_0; \forall u(\cdot) \in \mathcal{U}_m\}$  estiver contido nesse hiperplano. Caso em que a informação  $\{h^T e^{-At} B\}_i = 0$  é inútil, pois a definição de fronteira do conjunto  $K(t; x_0)$  torna-se diferente da definição de fronteira de um conjunto com dimensão  $n$ , pois  $K$  tem menos dimensões.

O livro [3] opta por definir normalidade como fizemos acima, mas é útil tornar tal definição menos restritiva para respeitar a geometria (a dimensão) de  $K(t; x_0)$ . Assim, poderemos utilizar o teorema 5 para abranger mais casos e até mesmo validar a recíproca de tal teorema.

### Interpretação de álgebra linear de $K$

Se considerarmos a geometria de  $K$  para definir normalidade poderemos afirmar que

$$\text{sistema é normal} \Leftrightarrow \text{há um único controle temporal ótimo}$$

Se esse é o enunciado do teorema 5, agora o mesmo abrangerá leque maior de sistemas.

Podemos, analisar algebricamente o espaço das variáveis de estado:  $\mathbb{R}^n$ . Analisaremos nesse âmbito, o conjunto de vetores  $\{\vec{b}_1, A\vec{b}_1, \dots, A^{n-1}\vec{b}_1, \vec{b}_2, A\vec{b}_2, \dots, A^{n-1}\vec{b}_2, \dots, \vec{b}_m, \dots, A^{n-1}\vec{b}_m\}$ .

Primeiro, define-se os espaços vetoriais

$$\beta_i = \text{ger}\{\vec{b}_i, A\vec{b}_i, \dots, A^{n-1}\vec{b}_i\}$$

$$\mathcal{B} = \bigoplus_{j=1}^m \beta_j$$

Como já foi mostrado, se  $\text{rank}(M) < n$ , então

$$\exists \vec{n} \neq \vec{0}, \text{tq. } \vec{n} \perp \mathcal{B} \quad (n^T M = \vec{0})$$

$$\Rightarrow h^T \int_0^t e^{A(t-s)} Bu(s) ds = n^T \int_0^t e^{-As} Bu(s) ds = 0$$

$$\Rightarrow h^T (x(t_1; x_0, u(\cdot)) - e^{At} x_0) = 0$$

Usando a definição dada de  $\hat{K}(t; x_0)$

$$\hat{K}(t; x_0) \perp \vec{h}$$

Ou seja,  $\vec{n} \perp \mathcal{B} \therefore \hat{K}(t; x_0) \perp \vec{h}$ . Utilizando um desenvolvimento análogo ao feito no teorema 3 do capítulo **controlabilidade**, substituindo conjunto o conjunto controlável  $\mathcal{C}(t)$  por  $\hat{K}(t; x_0)$ , conclui-se que a recíproca é verdadeira. Podemos inferir, por fim, que  $\dim(\hat{K}(t; x_0)) = \dim(\mathcal{B})$ .

Ou seja, se  $\square$  tiver dimensão menor que  $n$ , então  $\hat{K}(t; x_0)$  estará contido em subespaço vetorial de dimensão menor que  $n$ , o que é coerente com o resultado do teorema 3 do capítulo anterior ( $\vec{0} \notin \text{int}(C)$ ). E  $K(t; x_0)$  estará contido em subespaço afim.

Alem disso, viu-se no teorema 8 que  $[N_1 | N_2 | \dots | N_{n-1}]$  é uma simples reorganização das colunas de  $M$ . Assim,

$$\vec{h} \perp \mathcal{B} \Leftrightarrow \vec{h} \perp \beta_i \forall i = 1, \dots, n$$

E vimos pela demonstração do teorema 7 que se  $\vec{h} \perp \beta_i$  para algum  $i$ , então será indeterminada a  $i$ -ésima componente do controle para chegar a um ponto  $x' \in \partial K(t; x_0)$  que satisfaça  $h^T x' = \max\{h^T x; x \in K(t; x_0)\}$ .

Pela discussão até agora, para um certo  $\vec{n}$  enquanto houver um  $i$  tal que  $\vec{n} \in \beta_i$ ,  $\hat{K}(t; x_0)$  avança sobre a direção  $\vec{h} = e^{-At} \vec{n}$ . Se e somente se  $\vec{n} \perp \beta_i$  para todo  $i$  é que  $h^T x = 0 \forall x \in \hat{K}(t; x_0)$ , ou seja,  $\hat{K}(t; x_0)$  não avança sobre a direção  $\vec{h} = e^{-At} \vec{n}$ .

Interessa-nos estudar somente as direções pelas quais  $\hat{K}(t; x_0)$  avança, isto é, nos interessa somente o subespaço em que esse conjunto se situa. Desse modo, podemos definir normalidade segundo a geometria de  $K$ :

**Definição: 47** Sistema é normal segundo a geometria de seu conjunto alcançável se e somente se

$$\forall \vec{n} \neq \vec{0} \text{ e } \vec{n} \in \mathcal{B}, \vec{n} \in \beta_i \forall i = 1, \dots, n$$

Estamos nos atendo ao subespaço  $\mathcal{B}$  e continuamos a exigir que não exista vetor normal a nenhum  $\beta_i$ . Essa definição se assemelha ao teorema 8, mas a diferença é que em vez de exigirmos a não-singularidade de  $N_i$  (o que é um tanto restritivo) somente exigimos que os vetores ortogonais às colunas de  $N_i$  sejam ortogonais a  $\mathcal{B}$ . O que seria uma espécie de não-singularidade relativa ao subespaço  $\mathcal{B}$ . E da mesma forma que a não-singularidade de uma matriz em relação a  $\mathbb{R}^n$  significa que a imagem da matriz seja  $\mathbb{R}^n$ , segundo essa definição de normalidade um sistema é normal se e somente se

$$\beta_i = \mathcal{B} \forall i = 1, \dots, n$$

Pois se  $\beta_i \neq \mathcal{B}$  para algum  $i$ , existirá  $\vec{n} \in \mathcal{B}$  perpendicular a  $\beta_i$ , o que tornaria indeterminada a  $i$ -ésima componente do controle.

A igualdade dos subespaços também equivale a afirmar o posto de  $M$  é igual ao posto de  $N_i$  para todo  $i$ .

## Capítulo IV: Cálculo variacional e controle ótimo

### Introdução

O cálculo variacional lida com otimizações em espaços de dimensão infinita: espaços de funções. No caso da teoria de controle, as funções são vetoriais, ou seja, o funcional a ser maximizado ou minimizado depende de uma função de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}^n$ .

A formulação geral é:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } I(\bar{y}(\cdot)) \\ & \text{sujeito a } y \in \mathbb{Y}_{ad} \text{ e } G(y(\cdot)) = 0 \end{aligned}$$

Onde  $\mathbb{Y}_{ad}$  é o conjunto das funções admissíveis, por exemplo:  $\mathbb{Y}_{ad} = \{y \in C^0([t_0; t_1]; \mathbb{R}^n); y(t_0) = y_0\}$ .  $G(y(\cdot))$  é uma condição sobre as funções admissíveis, restringe o espaço de funções a um subespaço. Analogamente, em otimização em espaços de dimensão finita, temos que otimizar um funcional sobre curvas de nível.

Há muitas possibilidades de formular  $I(y)$  e  $G(y)$ , mas em geral é possível mostrar que essas diversas formas de escrever um problema variacional são equivalentes.

Queremos fazer um paralelo entre os problemas variacionais com problemas de controle ótimo e mostrar que esses são apenas uma classe restrita daqueles.

Por exemplo um problema de controle ótimo trivial que visivelmente é variacional é o seguinte.

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } C[\bar{u}(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_1} L(t, y(t), u(t)) dt \\ & \text{sujeito a } y \in \mathbb{Y}_{ad} \text{ e } \dot{y}(t) = u(t) \end{aligned}$$

Que equivale a

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } C[\bar{u}(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_1} L(t, y(t), \dot{y}(t)) dt \\ & \text{sujeito a } y \in \mathbb{Y}_{ad} \end{aligned}$$

Como nos capítulos anteriores não escreveremos a notação de vetor ao nos referirmos às variáveis de estado ou de controle de um problema de controle. Por facilidade escreveremos  $u(\cdot)$  em vez de  $\bar{u}(\cdot)$ .

### Equação de Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } I[y(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_1} L(t, y(t), \dot{y}(t)) dt \\ & \text{sujeito a } y \in \mathbb{Y}_{ad} = \{y \in C^1([t_0; t_1]; \mathbb{R}^n); y(t_0) = y_0, y(t_1) = y_1\} \end{aligned}$$

A otimização em espaços de dimensão infinita é análoga à otimização em espaços de dimensão finita, pois da mesma forma estudaremos o que ocorre com o valor do funcional

quando fazemos pequenas variações na função  $y(\cdot)$  e chegaremos à conclusão de que no ponto (função) de mínimo tal variação deve ser nula.

Devemos definir uma espécie de derivada generalizada, a qual damos o nome de variação de Gâteaux.

**Definição: 48** Dado um espaço vetorial  $\mathcal{A}$  e a função  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  definimos a variação de Gâteaux em  $y \in \mathcal{A}$  na direção  $v \in \mathcal{A}$ .

$$\delta f(y; v) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(y + \varepsilon v) - f(y)}{\varepsilon}$$

Quando tal limite existir. E nesse caso poderemos escrever:

$$\delta f(y; v) = \frac{df(y + \varepsilon v)}{d\varepsilon}$$

No caso do cálculo variacional  $\mathcal{A} = C^0([t_0; t_1]; \mathbb{R}^n)$  e  $f = I$ :

$$\begin{aligned} \delta I(y; v) &= \frac{I(y + \varepsilon v)}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} \int_{t_0}^{t_1} L(t, y + \varepsilon v, \dot{y} + \varepsilon \dot{v}) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{d\varepsilon} L(t, y + \varepsilon v, \dot{y} + \varepsilon \dot{v}) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} L_y(t, y, \dot{y}) v + L_{\dot{y}}(t, y, \dot{y}) \dot{v} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} L_y(t, y, \dot{y}) v dt + [L_{\dot{y}}(t, y, \dot{y}) v]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} (L_{\dot{y}}(t, y, \dot{y})) v dt \end{aligned}$$

Como queremos que  $y \in \mathbb{Y}_{ad}$ , temos que comparar funções admissíveis somente. Isso significa que imporemos  $v(t_0) = v(t_1) = 0$ , já que as funções admissíveis obedecem  $y(t_0) = y_0$  e  $y(t_1) = y_1$  preestabelecidos. Tal condição sobre a função  $v$  equivale a escrever  $v(\cdot) \in C_0^0([t_0; t_1]; \mathbb{R}^n)$ , o expoente de  $C$  referindo-se à equação contínua e o subscrito à condição nos extremos.

Em conseqüência:

$$\delta I(y; v) = \int_{t_0}^{t_1} \left[ L_y(t, y, \dot{y}) - \frac{d}{dt} (L_{\dot{y}}(t, y, \dot{y})) \right] v dt$$

Agora, chegaremos a conclusão análoga àquela da teoria de otimização em espaços de dimensão finita:

**Teorema 1: 49** Se  $\bar{y} \in \mathbb{Y}_{ad}$  é mínimo de  $I$ , então

$$\delta I(\bar{y}; \eta) = 0 \forall \eta \in C_0^0([t_0; t_1]; \mathbb{R}^n)$$

**Demonstração: 50** Primeiramente,  $\delta I(\bar{y}; \eta) \geq 0$ , pois se para algum  $\eta$   $\delta I(\bar{y}; \eta) < 0$  existiria  $\varepsilon > 0$  e  $\lambda_\varepsilon > 0$  tal que  $\|y - \bar{y}\|_{1,\infty} \leq \varepsilon$  e  $y = \bar{y} + \lambda_\varepsilon \eta$   $\therefore I(\bar{y} + \lambda_\varepsilon \eta) < I(\bar{y})$ . Isso contradiria o fato de que  $\bar{y}$  seja mínimo.

Se, por outro lado, para algum  $\eta$   $\delta I(\bar{y}; \eta) > 0$ , pela linearidade do operador variação de Gâteaux existirá  $\eta' = -\eta$  e  $\delta I(\bar{y}; \eta') < 0$  e recaímos no caso anterior.

Por consequência, só resta que  $\delta I(\bar{y}; \eta) = 0$ .

Podemos perceber que a recíproca do teorema anterior não é verdadeira, pois variação de Gâteaux: nula também é condição necessária para que uma função  $y$  seja ponto de máximo de  $I$ . Mas, se adicionarmos convexidade ao funcional a recíproca passa a ser verdadeira.

**Teorema 2: 51** Se  $L(t, y, \dot{y}) \in C^1(\mathbb{R}^{1+2n}; \mathbb{R})$  for convexo em relação a  $y$  e a  $\dot{y}$ , então

$$\delta I(\bar{y}; \eta) = \forall \eta \in C_0^0 \Leftrightarrow \bar{y} \text{ m\u00ednimo.}$$

Se  $L$  for estritamente convexo poderemos afirmar que  $\bar{y}$  \u00e9 \u00fanico m\u00ednimo.

**Demonstr\u00e7\u00e3o: 52**

$$L(t, y + \varepsilon v, \dot{y} + \varepsilon \dot{v}) - L(t, y, \dot{y}) \geq L_y(t, y, \dot{y})\varepsilon v + L_{\dot{y}}(t, y, \dot{y})\varepsilon \dot{v}$$

Se usarmos  $\varepsilon > 0$  e integrarmos

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} L(t, y + \varepsilon \eta, \dot{y} + \varepsilon \dot{\eta}) dt - \int_{t_0}^{t_1} L(t, y, \dot{y}) dt &\geq \int_{t_0}^{t_1} L_y(t, y, \dot{y})\varepsilon \eta + L_{\dot{y}}(t, y, \dot{y})\varepsilon \dot{\eta} dt \\ &\geq \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} L_y(t, y, \dot{y})\eta + L_{\dot{y}}(t, y, \dot{y})\dot{\eta} dt \\ &= \varepsilon \delta I(y; \eta) \end{aligned}$$

Ou seja

$$I(y + \varepsilon \eta) - I(y) \geq \varepsilon \delta I(y; \eta)$$

Se  $\delta I(y; \eta) = 0$ , ent\u00e3o

$$\begin{aligned} I(y + \varepsilon \eta) - I(y) &\geq 0 \\ \Rightarrow I(y + \varepsilon \eta) &\geq I(y) \end{aligned}$$

Assim, demonstramos  $\delta I(y; \eta) = 0$  para todo  $\eta$  \u00e9 condi\u00e7\u00e3o suficiente para  $y$  ser m\u00ednimo. Pelo teorema anterior hav\u00edamos mostrado que \u00e9 necess\u00e1ria.

Se  $L$  for estritamente convexo, o desenvolvimento da demonstra\u00e7\u00e3o permanece o mesmo s\u00f3 que trocamos o sinal  $\geq$  por  $>$ . Na \u00faltima equa\u00e7\u00e3o isso evidencia a unicidade de  $y$  como ponto de m\u00ednimo.

Agora, como achar fun\u00e7\u00f5es  $y$  que satisfa\u00e7am a equa\u00e7\u00e3o  $\delta I(y; \eta) = 0 \forall \eta(\cdot)$ ? Queremos uma equa\u00e7\u00e3o na qual  $\eta$  n\u00e3o apare\u00e7a, pois o que queremos descobrir \u00e9  $y(\cdot)$ .

Para achar tal equa\u00e7\u00e3o teremos que utilizar um resultado intuitivo de espa\u00e7os de fun\u00e7\u00f5es, o lema de *du Bois-Remond*.

**Lema du Bois-Remond: 53** Se  $f \in C([a; b]; \mathbb{R}^n)$  e para todo  $g \in C_0^1([a; b]; \mathbb{R}^n)$

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = 0, \text{ então } f(t) \equiv \vec{0} \forall t \in [a; b]$$

A demonstração será omitida, mas o caso unidimensional do lema ( $n = 1$ ) pode ser encontrado no livro [3].

$$\begin{aligned} \delta I(y; \eta) &= 0 \forall \eta \in C_0^1([t_0; t_1]; \mathbb{R}^n) \\ \Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} \left[ L_y(t, y, \dot{y}) - \frac{d}{dt}(L_{\dot{y}}(t, y, \dot{y})) \right] \eta dt &= 0 \end{aligned}$$

Pelo lema de *du Bois Remond*:

$$L_y(t, y, \dot{y}) - \frac{d}{dt} L_{\dot{y}}(t, y, \dot{y}) = 0$$

Que, para  $n \neq 1$ , é uma equação vetorial.

Obtivemos uma equação diferencial, conhecida como equação de Euler-Lagrange, cujas soluções  $y \in \mathbb{Y}_{ad}$  são candidatos a mínimo global de  $I$  no domínio  $\mathbb{Y}_{ad}$ . Tais soluções são chamadas de extremais ou estacionárias.

### Restrições lagrangeanas

Há diversas formas de definir o conjunto admissível. Dependendo do problema podemos ter os instantes inicial e final como predefinidos (problema de tempo fixo); podemos ter um ou os dois desses instantes como incógnitas a serem otimizadas (tempo livre); e, ainda, podemos ter  $I$  definido na reta toda  $[-\infty; +\infty]$  ou em semi-reta (horizonte infinito).

Analogamente, as restrições do problema variacional podem ser diversas.

- Condição de contorno transversal: no instante final o valor das variáveis de estado e do tempo pertencem a uma curva de nível de uma função dada.

$$\sigma(y(t_1), t_1) = 0$$

Essa restrição é utilizada em problemas de tempo livre. E podemos fazer condição de contorno transversal também sobre a condição inicial

- Restrições isoperimétricas: um funcional  $J[y(\cdot)]$  permanece com valor constante.

$$J[y(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_1} G(t, y(t), \dot{y}(t)) dt = c, c \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{Y}_{ad}$$

Essa condição é chamada de isoperimétrica pois uma integral unidimensional pode ser interpretada como o cálculo do comprimento de uma curva em  $\mathbb{R}^n$ .

- Restrições lagrangeanas: A todo instante, as variáveis de estado e a variável tempo pertencem à curva de nível de uma função dada.

$$G(t, y(t)) = 0 \forall t \in [t_0; t_1]$$

Dessas restrições, a mais importante para o estudo da teoria de controle é a lagrangeana. Portanto, veremos como resolver a otimização de um problema variacional sujeito a uma restrição lagrangeana.

A equação de Euler-Lagrange, na forma apresentada acima, serve para problemas sem restrição.

Assim como na otimização em espaços de dimensão finita, em que ao acrescentarmos restrições surgem os multiplicadores de Lagrange, as restrições lagrangeanas requerem surgimento de funções multiplicativas, às quais damos o nome de variáveis adjuntas.

Seja, o problema:

$$\begin{aligned} \min I(y) &= \int_{t_0}^{t_1} L(t, y(t), \dot{y}(t)) dt \\ \text{s.a. } G(t, y(t)) &= 0 \text{ e } y \in \mathbb{Y}_{ad} = \{y \in C^1([t_0; t_1]; \mathbb{R}^n); y(t_0) = y_0 \text{ e } y(t_1) = y_1\} \end{aligned}$$

Seja  $\tau \in [t_0; t_1]$  onde  $G_{y_j}(t, y) \neq 0$  para algum  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Escrevamos o vetor de estado  $y$  como  $y = (y_j, Y)$ .

Considerando a função  $G$  continuamente derivável, existe intervalo  $N$  vizinhança de  $\tau$  em que  $G_{y_j}(t, y) \neq 0$ . Pelo teorema da função implícita existe função  $g$

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} &\rightarrow \mathbb{R} \\ y_j &= g(t, Y) \\ \Rightarrow G(t, g(t, Y), Y) &= 0 \forall t \in [t_0; t_1] \end{aligned}$$

Definimos um funcional  $\tilde{I}(Y)$

$$\tilde{I}(Y) = \int_N \tilde{L}(t, Y, \dot{Y}) dt = \int_N \tilde{L}(t, y_j, Y, \dot{y}_j, \dot{Y}) dt, \text{ onde } y_j = g(t, Y)$$

Se  $\bar{y}$  minimiza o funcional  $I$  no intervalo  $[t_0; t_1]$ , então  $\bar{Y}$  minimiza  $\tilde{I}$  em  $N$ .

Como em  $N$  a função  $g$  garante a satisfação da restrição lagrangeana, a minimização de  $\tilde{I}$  em  $N$  é uma otimização sem restrição, e podemos usar a equação de Euler Lagrange

$$\frac{d}{dt} \tilde{L}_{\dot{Y}} - \tilde{L}_Y = 0$$

Resolvamo-no:

$$\begin{aligned} y_j(t) &= g(t, Y(t)) \\ \dot{y}_j(t) &= g_t(t, Y) + g_Y(t, Y) \dot{Y} \\ \tilde{L}_Y &= L_Y + L_{y_j} g_Y + L_{\dot{y}_j} [g_t(t, Y) + g_Y(t, Y) \dot{Y}] \\ \tilde{L}_{\dot{Y}} &= L_Y + L_{\dot{y}_j} g_Y \end{aligned}$$

Substituindo na equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} [L_{\dot{Y}} + L_{\dot{y}_j} g_Y] - (L_Y + L_{y_j} g_Y + L_{\dot{y}_j} [g_t(t, Y) + g_Y(t, Y) \dot{Y}]_Y)$$

Como  $[g_t(t, Y) + g_Y(t, Y) \dot{Y}]_Y = [\dot{y}_j]_Y = \frac{d}{dt} [y_j]_Y = \frac{d}{dt} g_Y$ , substituimos na expressão acima e obtemos

$$\begin{aligned} & \left( \frac{d}{dt} [L_{\dot{Y}}] - L_Y \right) + \frac{d}{dt} [L_{\dot{y}_j} g_Y] - L_{y_j} g_Y - L_{\dot{y}_j} [g_t(t, Y) + g_Y(t, Y) \dot{Y}]_Y \\ &= \left( \frac{d}{dt} [L_{\dot{Y}}] - L_Y \right) + \frac{d}{dt} [L_{\dot{y}_j} g_Y] - L_{y_j} g_Y - L_{\dot{y}_j} \frac{d}{dt} g_Y \\ &= \left( \frac{d}{dt} [L_{\dot{Y}}] - L_Y \right) + \frac{d}{dt} (L_{\dot{y}_j}) g_Y + \frac{d}{dt} (g_Y) L_{\dot{y}_j} - L_{y_j} g_Y - L_{\dot{y}_j} \frac{d}{dt} g_Y \\ &= \left( \frac{d}{dt} [L_{\dot{Y}}] - L_Y \right) + \frac{d}{dt} (L_{\dot{y}_j}) g_Y - L_{y_j} g_Y \\ &= \left( \frac{d}{dt} [L_{\dot{Y}}] - L_Y \right) + \left( \frac{d}{dt} (L_{\dot{y}_j}) - L_{y_j} \right) g_Y \end{aligned}$$

Como  $G(t, y_j, Y) \equiv 0$  em  $t = \tau$ , diferenciamos:

$$\begin{aligned} G_Y = \vec{0} &\Rightarrow G_{y_j} \cdot g_Y + G_Y = \vec{0} \\ G_Y &= -G_{y_j} \cdot g_Y \end{aligned}$$

Escolhemos  $\lambda \in C([t_0; t_1]; \mathbb{R})$  tal que:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} [L - \lambda G]_{\dot{Y}} - [L - \lambda G]_Y \\ &= \frac{d}{dt} L_{\dot{Y}} - L_Y + \lambda G_Y \\ &= \left( L_{y_j} - \frac{d}{dt} L_{\dot{y}_j} \right) g_Y - \lambda G_{y_j} \cdot g_Y \\ &= \left( L_{y_j} - \frac{d}{dt} L_{\dot{y}_j} - \lambda G_{y_j} \right) \cdot g_Y \end{aligned}$$

Escolhendo para  $t \in N$

$$\lambda(t) = \frac{L_{y_j} - \frac{d}{dt} L_{\dot{y}_j}}{G_{y_j}}$$

O que é bem determinado, pois no intervalo N:  $G_{\dot{y}_j} \neq 0$ .

Por outro lado, derivando em  $y_j$  temos:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} [L - \lambda G]_{\dot{y}_j} - [L - \lambda G]_{y_j} \\ &= \frac{d}{dt} L_{\dot{y}_j} - L_{y_j} + \lambda G_{y_j} \end{aligned}$$

Essa expressão iguala à zero novamente para  $\lambda(t) = \frac{L_{y_j} - \frac{d}{dt} L_{\dot{y}_j}}{G_{y_j}}$ .

Por fim podemos estabelecer que se  $\bar{y}$  é um ponto de mínimo do problema de otimização:

$$\exists \lambda(\cdot) \in C([t_0; t_1]; \mathbb{R}) \text{ tq.}$$

$$\frac{d}{dt} [L - \lambda G]_{\dot{y}} - [L - \lambda G]_{\dot{y}}$$

$$\frac{d}{dt} [L - \lambda G]_{\dot{\lambda}} - [L - \lambda G]_{\dot{\lambda}}$$

Onde a segunda equação somente retorna a própria restrição  $G = 0$ , já que L nem G dependem de  $\lambda$  explicitamente.

O método de resolução do sistema foi construtivamente mostrado nas linhas anteriores.

Para resolver o problema variacional com restrições lagrangeanas deve-se achar intervalos I nos quais a derivada de G em relação a uma das componentes do vetor  $\bar{y}$  não se anule.

Talvez haja a necessidade de resolver tal sistema para intervalos diferentes visto que  $G_{y_j}$  pode anular-se e então deveríamos achar outra componente de y, em relação a qual a derivada de G não seja nula.

Ao problema de determinação da função  $\lambda$  chamamos de problema adjunto, e damos o nome de variável adjunta a  $\lambda$ .

Há um resultado interessante de Lagrange em relação à otimização em espaços gerais. Exporemos aqui por mérito ilustrativo:

**Teorema 3(Lagrange): 54** *Seja Y espaço vetorial normalizado; I e G funções de Y em  $\mathbb{R}$ ;  $\delta I(y; \nu)$  e  $\delta G(y; \nu)$  contínua em  $y \forall \nu \in Y$ .*

Se  $\bar{y}$  é mínimo local de I restrito a  $G(y)=0$ , então existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $\delta(I + \lambda G)(y; \nu) = 0 \forall \nu \in Y$  ou  $\delta G(y; \nu) = 0 \forall \nu \in Y$

No caso do problema variacional com restrição lagrangeana, I e G não têm domínio no mesmo espaço; I tem domínio em  $C([t_0; t_1]; \mathbb{R}^n)$ , enquanto G sai de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . Por isso, a variável adjunta não é um simples número real.

*Obs.:* A função G pode depender também de  $\dot{y}$ , e é o que ocorre quando considerarmos a relação entre problemas de controle ótimo como veremos.

### Aplicação em controle ótimo

$$\begin{aligned} \min I(u) &= \int_{t_0}^{t_1} L(t, y(t), u(t)) dt \\ \dot{y} &= f(t, y, u(\cdot)) \\ y(\cdot) \in \mathbb{Y}_{ad} \quad u(\cdot) \in \mathcal{U}_m &= \left\{ u(\cdot) \in \hat{C}^1([t_0; t_1]; \mathbb{R}^m); u(t) \in \Gamma \forall t \right\} \end{aligned}$$

Podemos interpretar o problema de controle ótimo como um problema variacional de restrição lagrangeana. O truque é que passamos a interpretar as variáveis de controle como variáveis de estado, que em lado das antigas variáveis de estado compõem um espaço vetorial com um funcional a minimizar e uma restrição lagrangeana.

Em outras palavras passamos a trabalhar com um problema variacional no espaço  $C([t_0; t_1]; \mathbb{R}^{n+m})$ , onde o vetor de estado é

$$Y = (\bar{y}, \bar{u})$$

E a restrição lagrangeana

$$G(t, Y, \dot{Y}) = -\dot{y} + f(t, y, u) = \vec{0}$$

Assim, reescrevemos o problema assim:

$$\begin{aligned} \min I(Y) &= \int_{t_0}^{t_1} L(t, Y) dt \\ G(t, Y, \dot{Y}) &= 0 \\ Y &\in \mathbb{Y}_{ad} \times \mathcal{U}_m \end{aligned}$$

Quando resolvemos, acima, o problema lagrangeano, o fizemos para o caso de uma única restrição. Mas pode ser mostrado que a solução é análoga se tivermos várias restrições, como nesse problema em que chegamos.

Assim, como na seção anterior, se  $\bar{y}$  é ponto de mínimo existe  $\Lambda(\cdot) \in C([t_0; t_1]; \mathbb{R}^n)$  tal que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [L - \Lambda^T G]_{\dot{y}} - [L - \Lambda^T G]_y &= \vec{0} \\ \frac{d}{dt} [L - \Lambda^T G]_{\dot{u}_i} - [L - \Lambda^T G]_{u_i} &= \vec{0} \\ \frac{d}{dt} [L - \Lambda^T G]_{\dot{\Lambda}} - [L - \Lambda^T G]_{\Lambda} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Essas equações são as equações de otimização.

**Observação:** Assim como no caso do calculo variacional, a equação derivada em  $\Lambda$  simplesmente retorna a restrição lagrangeana.

Da primeira equação:

$$\dot{\Lambda} + (L_y + \Lambda f_y) = \vec{0}$$

Da segunda:

$$L_u + \Lambda f_u = \vec{0}$$

Por facilidade, definimos a função hamiltoniana:  $H(y, u, \Lambda) = L + \Lambda^T f = L + \Lambda^T \dot{y}$ , e reescrevemos as equações:

$$\begin{aligned}\dot{\Lambda} &= -H_y \quad (\text{equação adjunta}) \\ H_u &= 0 \quad (\text{equação de otimalidade}) \\ \dot{y} &= H_\Lambda \quad (\text{equação de evolução do estado})\end{aligned}$$

### Recíproca

Na subseção anterior desenvolvemos as equações a partir do fato que existia um ponto de mínimo. Assim, tais equações são condições necessárias, mas queremos mostrar que em certas situações elas são também suficientes.

**Teorema 4: 55** *Se  $H$  for convexo em relação a  $y$  e  $u$ :*

$$H(y + v, u + \omega, \Lambda) - H(y, u, \Lambda) \geq \langle H_y(y, u, \Lambda); v \rangle + \langle H_u(y, u, \Lambda); \omega \rangle$$

Nesse caso, as condições das equações de otimização, mais

$$\bar{y}(t_0) = y_0 \quad \bar{y}(t_1) = y_1$$

Implicam que a solução  $(\bar{y}, \bar{u})$  é mínimo local do funcional  $I$  sujeito à restrição  $G = 0$ . Caso a igualdade da inequação ocorrer se e somente se  $v\omega = 0$ , então  $(\bar{y}, \bar{u})$  é mínimo global.

**Demonstração: 56** *Seja  $(\bar{y}, \bar{u})$  uma solução do sistema de equações acima. Assim, para todo  $(y, u) \in \mathbb{Y}_{ad} \times \mathcal{U}_m$  que satisfaça a restrição  $G = -\dot{y} + f(t, y, u) = 0$ :*

$$\begin{aligned}I(y, u) - I(\bar{y}, \bar{u}) &= \int_{t_0}^{t_1} L(t, y(t), u(t)) - L(t, \bar{y}(t), \bar{u}(t)) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} L(t, y(t), u(t)) - L(t, \bar{y}(t), \bar{u}(t)) + \Lambda(t)(G(y(t), u(t)) - G(\bar{y}(t), \bar{u}(t))) dt\end{aligned}$$

Pois ambos  $G(y(t), u(t)) \equiv \vec{0}$  e  $G(\bar{y}(t), \bar{u}(t)) \equiv \vec{0}$  no intervalo  $[t_0; t_1]$ . Continuando:

$$\begin{aligned}& \int_{t_0}^{t_1} L(t, y(t), u(t)) - L(t, \bar{y}(t), \bar{u}(t)) + \Lambda(t)(G(y(t), u(t)) - G(\bar{y}(t), \bar{u}(t))) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (L(t, y, u) + \Lambda f(t, y, u)) - (L(t, \bar{y}, \bar{u}) + \Lambda f(\bar{y}, \bar{u})) - \Lambda(\dot{y} - \dot{\bar{y}}) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} H(y, u, \Lambda) - H(\bar{y}, \bar{u}, \Lambda) - \Lambda(\dot{y} - \dot{\bar{y}}) dt \\ &\geq \int_{t_0}^{t_1} H_y(\bar{y}, \bar{u}, \Lambda)(y - \bar{y}) - H_u(\bar{y}, \bar{u}, \Lambda)(u - \bar{u}) - \Lambda(\dot{y} - \dot{\bar{y}}) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} -\dot{\Lambda}(y - \bar{y}) + 0 - \Lambda(\dot{y} - \dot{\bar{y}}) dt \\ &= [-\Lambda(y - \bar{y})]_{t_0}^{t_1} = -\Lambda(t_1)(y(t_1) - \bar{y}(t_1)) + \Lambda(t_0)(y(t_0) - \bar{y}(t_0)) = 0\end{aligned}$$

$$I(y, u) \geq I(\bar{y}, \bar{u})$$

No caso de convexidade estrita (a igualdade ocorre se e somente se  $v\omega = 0$ ) teremos desigualdade estrita  $I(y, u) > I(\bar{y}, \bar{u})$ .

Mostramos assim que, se o hamiltoniano for convexo, resolver o problema de controle ótimo equivale a ao de resolver as equações de otimização, as quais podem ser resumidas:

$$\frac{d}{dt} [L - \Lambda^T G]_y - [L - \Lambda^T G]_y = \bar{0}, Y = (y, u, \Lambda)$$

Podemos pensar então, que minimizar  $I(y, u)$  com suas restrições  $G(t, y, \dot{y}, u) = f(t, y, u) - \dot{y} = \bar{0}$  equivale a minimizar  $\hat{I}(y, u, \Lambda)$ .

$$\hat{I}(y, u, \Lambda) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, y, u) - \Lambda^T G(t, y, u) dt$$

$$(y(\cdot), u(\cdot)) \in \mathbb{Y}_{ad} \times \mathcal{U}_m$$

### Observações

Nessa seção acrescentarei minha interpretação sobre alguns aspectos da teoria e farei um paralelo entre duas abordagens adotadas no estudo de controle ótimo. A primeira é a adotada no livro [3], usando vetor estendido, a outra é a adotada no livro [4], usando o formalismo do cálculo variacional.

#### 1)Primeiro

Se  $H(y, u, \Lambda)$  convexo em relação a  $u$ :

$$H(y, u + \omega, \Lambda) - H(y, u, \Lambda) \geq \langle H_u(y, u, \Lambda); \omega \rangle$$

Nesse caso, a condição de otimização  $H_u(\bar{y}, \bar{u}, \bar{\Lambda})$  equivale a

$$H(y, u + \omega, \Lambda) - H(\bar{y}, \bar{u}, \bar{\Lambda}) \geq \langle H_u(\bar{y}, \bar{u}, \bar{\Lambda}); \omega \rangle = 0$$

$$\Rightarrow H(y, u + \omega, \Lambda) \geq H(\bar{y}, \bar{u}, \bar{\Lambda})$$

$$\Rightarrow H(\bar{y}, \bar{u}, \bar{\Lambda}) = \min\{H(\bar{y}, u, \bar{\Lambda}); u(t) \in \Gamma\} \forall t \in [t_0; t_1]$$

Essa nova formulação para a equação de otimização é mais útil, pois continua válida para o caso em que o hamiltoniano não for convexo e por que a equação de otimização antiga

$$H_u(t, u, \Lambda) = 0$$

não leva em conta a geometria do conjunto  $\Gamma$ . Essa equação está totalmente correta se  $\Gamma = \mathbb{R}^m$ , o que não se aplica em geral.

Fomos negligentes, portanto, ao fazermos as equações para resolver o problema de controle ótimo, pois não levamos em conta o conjunto  $\Gamma \ni u(t)$ .

Ao minimizarmos o funcional **Erreur ! Source du renvoi introuvable.** se  $\exists \partial \Gamma$  ( $\Gamma$  compacto) devemos tomar cuidado ao afirmarmos

$$\delta \hat{I}(\bar{y}, \bar{u}, \bar{\Lambda}; \eta_1, \eta_2, \eta_3) = 0 \forall (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in C([t_0; t_1]; \mathbb{R}^n) \times C([t_0; t_1]; \mathbb{R}^m) \times C([t_0; t_1]; \mathbb{R}^n)$$

Pois, na borda de  $\Gamma$   $\eta_2$  não permitido variar em qualquer direção:

*Obs.:* Aqui consideraremos  $\Gamma$  compacto, isto é, limitado e fechado.

- Se  $\exists t$  tal que  $\bar{u}(t) \in \partial\Gamma \Rightarrow \langle \eta_2(t); \bar{n}_{\partial\Gamma} \rangle \leq 0$

Onde  $\bar{n}_{\partial\Gamma}$  denota o vetor unitário normal a  $\partial\Gamma$  e voltado para fora de  $\Gamma$ .

O sentido da afirmação é que as únicas perturbações na função  $\bar{u}(t)$  no instante  $t$  permitidas são aquelas que não levem  $u(t)$  para fora de  $\Gamma$ , pois teríamos a nova função  $u(t)$  não admissível.

- se  $\forall t \in [t_0; t_1]$  tivermos  $u(t) \in \partial\Gamma$

$$\Rightarrow \langle \eta_2(t); \bar{n}_{\partial\Gamma}(t) \rangle \leq 0 \forall t \in [t_0; t_1]$$

Voltando ao funcional, se escolhermos  $\eta_1(t) = \eta_3 \equiv \bar{0} \forall t \in [t_0; t_1]$  teremos:

$$\delta \hat{J}(\bar{y}, \bar{u}, \bar{\Lambda}; 0, \eta_2, 0) = \int_{t_0}^{t_1} (L_u + \Lambda f_u) \eta_2 dt = 0$$

$$\forall \eta_2(\cdot) \text{ tq. } \langle \eta_2(t); \bar{n}_{\partial\Gamma}(t) \rangle \leq 0$$

Pode-se facilmente ser enganado a aplicar o Lema de *du Bois-Remond* a essa identidade, mas tal não pode ser usado, pois há restrição sobre a função  $\eta_2(\cdot)$ , enquanto que o lema exigiria nenhuma restrição.

É por isso que a primeira equação de otimização estava errada, pois ela equivale a afirmar, a partir da identidade, que:

$$L_u + \Lambda f_u = H_u = 0 \forall t \in [t_0; t_1]$$

O correto é afirmarmos que existe uma função  $\mu(t) \in C([t_0; t_1]; \mathbb{R})$  tal que:

$$H_u(t, \bar{y}, \bar{u}, \bar{\Lambda}) = \mu(t) \cdot \bar{n}_{\partial\Gamma}, \text{ se } u(t) \in \partial\Gamma$$

$$H_u(t, \bar{y}, \bar{u}, \bar{\Lambda}) = 0 \text{ se } u(t) \in \text{int}(\partial\Gamma)$$

Essa discussão tem conseqüências diretas em problemas de controles lineares m relação a  $u(\cdot)$ :

$$\dot{y} = g(t, y) + B(t).u(t)$$

$$L(t, y, u) = l(t, y) + A(t).u(t)$$

Pois nesse caso:

$$H_u = A(t) + \Lambda B(t)$$

Que independe de  $u(\cdot)$  e em geral não é identicamente nulo.

Desse modo, a formulação mais geral para a equação de otimização é:

$$H(\bar{y}, \bar{u}, \bar{\Lambda}) = \min \{ H(\bar{y}, u, \bar{\Lambda}); u(t) \in \Gamma \} \forall t \in [t_0; t_1]$$

## 2) Aplicação no princípio Bang-Bang

Utilizaremos o conceito visto acima para rever o princípio Bang-Bang.

Tal princípio estabelece que para sistemas lineares em relação ao controle:  $\mathcal{C}_{BB}(t_1) = \mathcal{C}(t_1)$  ou equivalentemente  $K_{BB}(t_1) = K(t_1)$  caso  $\Gamma$  seja hipercubo  $[-k; k]^m$ , ou mais geralmente:  $\mathcal{C}_\Gamma = \mathcal{C}_{co(\Gamma)}$ .

Seja o enunciado de um problema linear de controle ótimo, em que se deseja otimizar o tempo de chegada ao Target:

$$\begin{aligned} \min I(u) &= \int_0^T 1 dt = T \\ \dot{y} &= f(t, y, u(\cdot)) = g(t, y) + B(t)u(t) \\ y(\cdot) \in \mathbb{Y}_{ad} &= \text{left}\{y(\cdot) \in C([t_0; t_1]; \mathbb{R}^n); y(T) = y_1 \ y(0) = y_0\} \\ u(\cdot) \in \mathcal{U}_m &= \{u(\cdot) \in C([t_0; t_1]; \mathbb{R}^m); u(t) \in \Gamma \forall t\} \end{aligned}$$

Se  $(\bar{y}, \bar{u})$  é solução do problema acima, então:

$$H(\bar{y}, \bar{u}, \bar{\Lambda}) = \min\{1 + \Lambda(t)B(t)u(t); u(t) \in \Gamma\} \forall t \in [t_0; t_1]$$

Chamando  $\Lambda(t)B(t) = h^T(t)$ , queremos maximizar esse produto escalar  $h^T(t)u(t)$  em todo instante

(i) Se  $\Gamma$  for hipercubo, para maximizar o hamiltoniano:

$$u_i(t) = k \cdot \text{sgn}\{h_i(t)\}$$

Ou seja, os controles extremos são do tipo "Bang-Bang Piecewise constant", como mostrado no capítulo anterior.

**Teorema 5(meu): 57** No geral, para qualquer conjunto compacto  $\Gamma \in \mathbb{R}^m$  é verdade que para  $\bar{n} \neq \bar{0}$  qualquer

$$x \in \text{co}(\Gamma) \text{ e } \langle x; n \rangle = \max_{v \in \text{co}(\Gamma)} \Rightarrow \exists y \in \Gamma \text{ tq. } \langle y; n \rangle = \langle x; n \rangle$$

**Demonstração: 58** Pois se  $x \in \Gamma$  então  $y = x$  resolve.

Mas se  $x \notin \Gamma$  e  $x \in \text{co}(\Gamma)$ , supomos por absurdo que não haja  $y \in \Gamma$  que satisfaça tal relação:  $\langle y; n \rangle = \langle x; n \rangle$ .

$x \in \text{co}(\Gamma)$  significa que  $x$  é combinação convexa de pontos de  $\Gamma$ .

$\langle x; n \rangle = \max_{v \in \text{co}(\Gamma)} \{\langle v; n \rangle\}$ , significa em particular (já que  $\Gamma \subset \text{co}(\Gamma)$ ) que

$$\langle x; n \rangle = \max_{v \in \Gamma} \{\langle v; n \rangle\}$$

Então:

$$\forall v \in \Gamma \ \langle v; n \rangle < \langle x; n \rangle$$

Mas  $x$  é combinação convexa de pontos de  $\Gamma$ :

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^p \lambda_i v_i; \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1; \lambda_i > 0 \forall i = 1, \dots, p \\ \langle x; n \rangle &= \sum_{i=1}^p \langle \lambda_i v_i; n \rangle = \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle v_i; n \rangle \\ &< \sum_{i=1}^p \lambda_i \langle x; n \rangle = \langle x; n \rangle \sum_{i=1}^p \lambda_i = \langle x; n \rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle x; n \rangle < \langle x; n \rangle, \text{ absurdo!}$$

Assim, deve existir  $v \in \Gamma$  tal que  $\langle v; n \rangle \geq \langle x; n \rangle$ . Mas, por hipótese

$$\langle x; n \rangle = \max_{v \in co(\Gamma)} \{\langle v; n \rangle\} \text{ e } v \in \Gamma \subset co(\Gamma); \text{ desse modo, é falso dizer que } \langle v; n \rangle > \langle x; n \rangle,$$

devemos dizer que  $\langle v; n \rangle = \langle x; n \rangle$ .

Além disso, para balancear a inequação acima, como  $\langle v_i; n \rangle \leq \langle x; n \rangle \forall i$ , é necessário que se valha:  $\langle v_i; n \rangle = \langle x; n \rangle \forall i$ .

Assim, seja  $u^*(t) \in co(\Gamma)$  que maximiza H no instante t. Existirá  $u(t) \in \Gamma$  tal que  $\langle u(t); h(t) \rangle = \langle u^*(t); h(t) \rangle$  no instante t.

Por outro lado, se  $u'(t) \in \Gamma$  maximiza H no instante t, e como  $\Gamma \subset co(\Gamma)$ , então existe  $u(t) \in co(\Gamma)$  tal que  $\langle u(t); h(t) \rangle = \langle u'(t); h(t) \rangle$ : é só fazer  $u(t) = u'(t)$ .

Como  $K_\Gamma(t_1)$  são todos os pontos alcançáveis no instante  $t_1$  e mostramos que os pontos extremos (da borda de  $K(t_1)$ , que gastam tempo mínimo para serem alcançados) podem ser alcançados tanto por controles em  $\Gamma$  como  $co(\Gamma)$  no mesmo instante, demonstramos informalmente o princípio Bang-Bang para o caso linear.

### 3) Ligação entre duas abordagens

No capítulo de condições necessárias utilizou-se a abordagem do vetor estendido para se estudar o controle ótimo. Segundo essa abordagem, aumentamos em uma dimensão do vetor de estado, passando a trabalhar com um novo problema de controle, isto é:

$$\begin{aligned} \min I(u) &= \int_{t_0}^{t_1} L(t, y(t), u(t)) dt \\ \dot{y} &= f(t, y, u(\cdot)) \\ y(\cdot) \in \mathbb{Y}_{ad} \quad u(\cdot) \in \mathcal{U}_m &= \left\{ u(\cdot) \in \hat{C}^1([t_0; t_1]; \mathbb{R}^m); u(t) \in \Gamma \forall t \right\} \end{aligned}$$

equivale a:

$$\begin{aligned} \hat{y} &= \begin{bmatrix} \dot{y}_0 \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(t, y, u) \\ f(t, y, u) \end{bmatrix} = \hat{f}(t, y, u) \\ Target(t_1) &= \begin{bmatrix} y_1 \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

*menor possível*

O objetivo dessa seção é explicar que a abordagem do cálculo variacional e do vetor estendido são equivalentes, tendo o primeiro sido utilizado no livro [4] e o segundo no livro [3]. A idéia é facilitar a compreensão para os possíveis interessados no assunto que estejam iniciando seu estudo.

Outro objetivo é, como na subseção anterior, sermos mais rigorosos quanto ao que foi exposto anteriormente. Desse modo, alguém poderia dizer que não tivemos cuidado para estabelecer o sistema de equações de otimização, pois não consideramos a possibilidade, existente no teorema de Lagrange de que  $\delta G = 0$ . Para corrigir isso, faz-se uso dos multiplicadores de Fritz-Jones (análogos aos utilizados em otimização em espaços de dimensão finita) na minimização do funcional  $\hat{I}$  da equação **Erreur ! Source du renvoi introuvable.**

$$\begin{aligned} \min \hat{I}(y, u, \Lambda, \eta) &= \int_{t_0}^{y_1} \eta L(t, y, u) - \Lambda^T G(t, y, u) dt \\ (y(\cdot), u(\cdot)) &\in \mathbb{Y}_{ad} \times \mathcal{U}_m \\ (\eta, \Lambda) &\neq \bar{0} \end{aligned}$$

O hamiltoniano passa a ser escrito  $H = \eta L + \Lambda^T f$ , mas as equações de otimização permanecem as mesmas.

Prosseguindo, igualmente a variável adjunta  $\Lambda$  pode ser substituída por uma variável estendida  $\hat{\Lambda}$  pelo seguinte processo.

Primeiro avaliamos a equação adjunta:

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda} &= -H_y = -(\eta L_y + \Lambda^T f_y) \\ &= -[\eta L_{y_1}, \eta L_{y_2}, \dots, \eta L_{y_n}] - [\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n] \begin{pmatrix} f_{y_1}^1 & f_{y_2}^1 & \dots & f_{y_n}^1 \\ f_{y_1}^2 & f_{y_2}^2 & \dots & f_{y_n}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{y_1}^n & f_{y_2}^n & \dots & f_{y_n}^n \end{pmatrix} \\ &= -[\eta, \Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n] \begin{pmatrix} L_{y_1} & L_{y_2} & \dots & L_{y_n} \\ f_{y_1}^1 & f_{y_2}^1 & \dots & f_{y_n}^1 \\ f_{y_1}^2 & f_{y_2}^2 & \dots & f_{y_n}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{y_1}^n & f_{y_2}^n & \dots & f_{y_n}^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{\Lambda}_1 \\ \dot{\Lambda}_2 \\ \dot{\Lambda}_3 \\ \dots \\ \dot{\Lambda}_n \end{pmatrix} = -[\eta, \Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n] \begin{pmatrix} L_{y_1} & L_{y_2} & \dots & L_{y_n} \\ f_{y_1}^1 & f_{y_2}^1 & \dots & f_{y_n}^1 \\ f_{y_1}^2 & f_{y_2}^2 & \dots & f_{y_n}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{y_1}^n & f_{y_2}^n & \dots & f_{y_n}^n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\Lambda}_1 \\ \dot{\Lambda}_2 \\ \dots \\ \dot{\Lambda}_n \end{pmatrix} = -[\eta, \Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n] \begin{pmatrix} 0 & L_{y_1} & L_{y_2} & \dots & L_{y_n} \\ 0 & f_{y_1}^1 & f_{y_2}^1 & \dots & f_{y_n}^1 \\ 0 & f_{y_1}^2 & f_{y_2}^2 & \dots & f_{y_n}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & f_{y_1}^n & f_{y_2}^n & \dots & f_{y_n}^n \end{pmatrix}$$

Se fizermos  $\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} \eta \\ \Lambda \end{pmatrix}$  teremos:

$$\dot{\hat{\Lambda}} = \hat{\Lambda}^T \cdot \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \hat{f}_y \end{bmatrix}$$

Mas como  $f(t,y,u)$  independe de  $y_0$ , temos a derivada  $f_{y_0} = \bar{0}$ . Assim,

$$\dot{\hat{\Lambda}} = \hat{\Lambda}^T \hat{f}_y$$

Podemos, assim reformular as equações de otimização usando a abordagem de vetores estendidos como o livro [3] faz.

**Teorema 6 (Princípio do máximo de Pontryagin) 59** *Se  $(\bar{y}, \bar{u})$  minimiza  $I(u)$ , então existe  $\hat{\Lambda} \in C([t_0; t_1]; \mathbb{R}^{n+1})$  tal que:*

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\Lambda}} &= \hat{\Lambda}^T \hat{f}_y \\ \dot{\hat{y}} &= \hat{f} \\ H(\bar{y}, \bar{u}, \hat{\Lambda}) &= \min_{u(t) \in \Gamma} H(\hat{y}, u, \hat{\Lambda}), \forall t \in [t_0; t_1] \\ \hat{\Lambda}_0(t) &> 0, \dot{\hat{\Lambda}}_0(t) = 0 \end{aligned}$$

Onde

$$\begin{aligned} H(y, u, \hat{\Lambda}) &= \eta L + \Lambda^T f = \eta \dot{y}_0 + \Lambda^T \dot{y} = (\eta, \Lambda) \begin{pmatrix} \dot{y}_0 \\ \dot{y} \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow H(y, u, \hat{\Lambda}) = \hat{\Lambda}^T \hat{f} \end{aligned}$$

## Conclusões

Todos os capítulos desse relatório têm como objetivo de estimular quem está iniciando o estudo de teoria de controle, já que ele foi escrito por mim, que passei, talvez, pelas mesmas dificuldades de compreensão.

Esse texto visa ser informal, de modo que exclui demonstrações rigorosas. Ele foi desenvolvido ao longo da leitura dos livros [3] e [4], por meio de notas de estudo minhas, que fazia para meu encontro semanal com meu orientador Thomas Lewiner.

Os últimos meses da iniciação foram dedicados à aplicação da teoria de controle à simulação de fluidos. Por isso, a bibliografia contém artigos e livros sobre CFS (Computational Fluids Simulation).

A tentativa de aplicar a teoria de controle à simulação de fluidos levou a um estudo de CFS, que envolveu: Equações de Navier-Stokes, equações diferenciais parciais, métodos iterativos para solução de sistemas lineares e técnicas de simulação de fluidos computacionais.

Minha simulação baseou-se na abordagem de Jos Stam . Ou seja, estudando-se o fluido sob o ponto de vista de um referencial inercial (método de Euler) e aplicando-se 5 passos em cada iteração: difusão, gravidade, advecção e projeção. Essa abordagem está descrita bem no artigo [2], texto consagrado de Jos Stam.

A simulação trouxe muitos aprendizados para mim, porém não consegui terminá-la a tempo para a apresentação, sendo essa a razão de não acrescentar mais conteúdo sobre ela.

### Bibliografia:

- 1 - MCNAMARA A., TREUILLE A., POPOVIĆ Z., STAM J. Fluids control using the adjoint method, **Siggraph** 2004. *Paper motivador da iniciação científica.*
- 2 - STAM J., Stable Fluids. **Siggraph** 1999. *Artigo consagrado de Jos Stam, onde ele usa técnicas implícitas para tornar o problema discreto estável. É interessante, pois dá as diretrizes para se simular os fluidos no computador.*
- 3 - Macki J.W.; Strauss A. Introduction to optimal Control Theory. **Springer** 1982. *Uma visão inicial da teoria do controle de uma forma mais geométrica e, portanto, mais tangível para alunos de graduação, embora sempre o primeiro contato com a teoria do controle seja sempre um pouco estranho.*
- 4 - Leitão, A. Cálculo Variacional e controle ótimo. **IMPA**. *Uma abordagem diferente da teoria do controle, se comparado com o livro anterior, pois foca no problema do controle ótimo e usa uma linguagem de calculo variacional.*
- 5 - Bordignon A, Tavares G.. Navier Stokes em GPU. **PUC-Rio**. *Muito interessante pois deduz a equação de Navier Stokes e fala um pouco sobre a implementação computacional da simulação dos fluidos.*
- 6 - Thürey N., Keiser R., Pauly M., Rüdè U. Detail-preserving fluid control. **SGP** 2006. *Uma abordagem alternativa e menos fisicamente correta, sem uso de Navier Stokes.*
- 7 - Harlow F., Welch E. Numerical Calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. **Physical Fluids** 2004. *Apesar de não usar explicitamente Navier Stokes utilize a abordagem de Euler para simular fluidos.*