

## CURVATURAS, GEODÉSICAS E ISOMETRIAS ESTUDANDO EXEMPLOS NO PLANO E NO ESPAÇO

**Alunos: Gustavo Schinazi e Arthur de Freitas**  
**Orientador: Ricardo Sá Earp**

### Curvatura e Evoluta de curvas planas

Começamos nosso trabalho com o estudo das curvas planas. Primeiro, estudamos o conceito de **curvatura** de uma curva plana. Para isso, adotamos um sistema de referência móvel ao longo da curva, o *diedro de Frenet*, composto pelos vetores ortonormais  $T$  (vetor tangente unitário) e  $N$  (rotação de  $T$  em  $90^\circ$  no sentido anti-horário). Vimos que  $T'$ , para uma curva parametrizada pelo comprimento de arco  $\alpha(s)$ , é sempre paralelo a  $N$ :  $T'(s) = k(s) \cdot N(s)$ . A curvatura, por definição, é  $k = T'(s) \cdot N(s)$ , e o vetor curvatura é  $k \cdot N(s)$ . Entendemos o conceito físico de curvatura: ela representa a aceleração centrípeta de uma partícula movendo-se com velocidade unitária ao longo da curva. Note que o módulo da curvatura pode ser positivo ou negativo, sendo o vetor curvatura no sentido positivo ou negativo, respectivamente, do vetor  $N$ . Logo,  $k > 0$  implica uma curva no sentido anti-horário, e  $k < 0$ , no sentido horário. Chegamos à expressão genérica para a curvatura de uma curva qualquer regular  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ :

$$k_\alpha(t) = \frac{\alpha'(t) \cdot J\alpha''(t)}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{x'y'' - x''y'}{\|\alpha'\|^3}, \text{ onde } J \text{ é a rotação de } 90^\circ \text{ no sentido anti-horário.}$$

Outro resultado interessante é a relação direta entre curvatura e concavidade. Se analisarmos uma curva como um gráfico, temos  $\alpha(x) = (x, f(x))$ . Assim, obtemos

$$k_\alpha(t) = \frac{f''(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}^3}. \text{ Sem perda de generalidade, podemos assumir que } f(x) = f'(x) = 0,$$

chegando a  $k_\alpha(t) = f''(x)$ . Assim, curvatura positiva implica concavidade positiva e, conseqüentemente, curva no sentido anti-horário, e vice-versa. Analisamos diversos exemplos com a ajuda do MAPLE, alguns dos quais serão apresentados adiante.

A seguir, estudamos os conceitos de **círculo osculador** e de **evoluta**. Círculo osculador é o círculo que “melhor aproxima” uma curva em um determinado ponto, tangenciando a curva e tendo curvatura  $k(t)$  igual à da curva naquele ponto e, portanto, raio  $1/k(t)$ . Evoluta é o lugar geométrico dos centros dos círculos osculadores de uma curva. Encontramos sua expressão analítica, dada por  $ev_\alpha(t) = \alpha(t) + 1/k(t) \cdot N(t)$ . Derivando essa expressão, verificamos que a reta normal de uma curva em cada ponto é a reta tangente à evoluta no ponto referente. Também percebemos que a evoluta de uma curva  $\alpha$  toca  $\alpha$  nas suas cúspides, pois cúspides, em geral, têm curvatura  $\infty$ . Além disso, observamos e demonstramos que máximos e mínimos de curvatura em  $\alpha$  geram cúspides na evoluta de  $\alpha$ . Analisamos diversos exemplos com o auxílio do MAPLE, com foco na elipse e na família dos *hipociclóides*.

Em relação à elipse, verificamos, através de diversos métodos (geométricos e analíticos), que, nos pontos de curvatura máxima, o círculo osculador encontra-se totalmente dentro da elipse, e que, nos pontos de curvatura mínima, ele se encontra completamente fora dela. Percebemos, também, que a

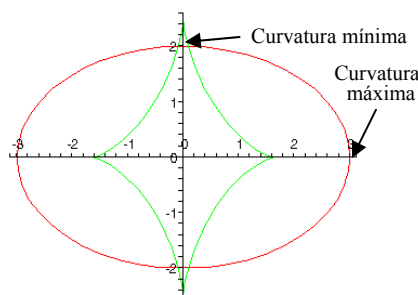


Figura 1: Uma elipse e sua evoluta

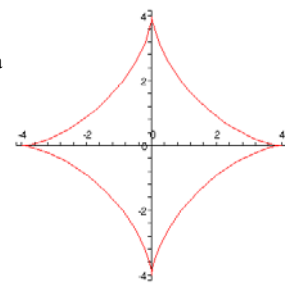


Figura 2: Astróide

evolva de uma elipse se assemelha a um *astróide*. Suas equações na **forma implícita** são, respectivamente,  $\frac{(ax)^{2/3}}{(a^2 - b^2)^{2/3}} + \frac{(by)^{2/3}}{(a^2 - b^2)^{2/3}} = 1$  e  $\frac{x^{2/3}}{(4A)^{2/3}} + \frac{y^{2/3}}{(4A)^{2/3}} = 1$ .

Buscando a relação entre as duas equações, concluímos que elas só se igualam no caso degenerado, no qual as curvas existem somente na origem; ou seja, embora sejam semelhantes, não há relação entre elas.

Os *hipociclóides* são obtidos geometricamente pela rotação de um círculo de raio  $l$  dentro de outro de raio  $\frac{p}{q}$  ( $p > q$ ). Eles possuem  $p$  cúspides e têm período  $2\pi q$  (o círculo menor dá  $q$  voltas em torno do centro do maior). Percebemos que a evolva de um *deltóide* ( $\frac{p}{q} = 3$ ) parecia outro *deltóide*, maior e girado (Figura 3), e que o mesmo se seguia para um *astróide* ( $\frac{p}{q} = 4$ ). Em vista disto, decidimos verificar a proposição de que a evolva de um hipociclóide genérico é um hipociclóide de mesmos parâmetros. Analisando outros exemplos dessa família para encontrar quais transformações levam um *hipociclóide* em sua evolva, vimos que uma rotação de  $\frac{q\pi}{p}$  no sentido anti-horário ( $\mathbf{R}_{q\pi/p}$ ) seguida de uma homotetia de  $\frac{p}{p-2q}$  ( $\mathbf{H}_{p/p-2q}$ ) de um *hipociclóide* (ambos são movimentos rígidos) resulta numa curva visualmente idêntica à sua evolva ( $\mathbf{ev}_a(\mathbf{t})$ ). No entanto, as duas parametrizações “começam” em pontos diferentes da curva. Então, fazendo ainda uma reparametrização linear de  $\mathbf{t} + \frac{q\pi}{p}$  (note que o coeficiente linear é igual ao ângulo de rotação), iguala-se a curva obtida à evolva.

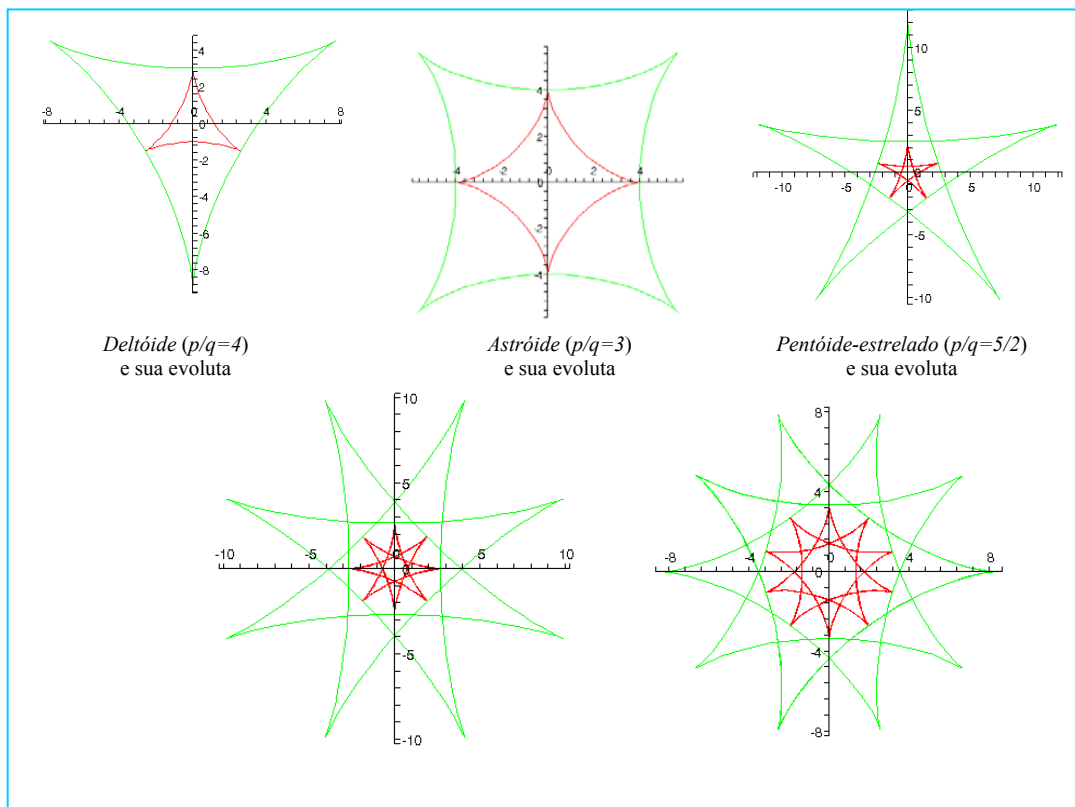


Figura 3

Chegamos a esses resultados através de muita análise do caso genérico e de vários exemplos, principalmente os de  $q=1, 2$  e  $3$ . Observamos que há várias rotações possíveis ( $p$  possibilidades), e que cada uma requer uma reparametrização específica. Por exemplo, no caso do *deltóide*, o mais “simples” seria uma rotação de  $\pi$  e uma reparametrização de  $t+\pi$ . No entanto, no caso geral, o ângulo apresentado acima ( $\frac{q\pi}{p}$ ) é o mais “simples”, pois é o que permite generalizar de forma mais fácil o coeficiente da

reparametrização, que é igual a esse ângulo para qualquer *hipociclóide*. Para chegar ao fator da homotetia, analisamos principalmente o caso genérico, utilizando a forma de construção de um *hipociclóide* e as propriedades que conhecemos e observamos das evolutas, em particular as que dizem respeito às cúspides (mencionadas acima). Com a ajuda do MAPLE, aplicamos essas três transformações a um *hipociclóide* genérico e obtivemos a mesma equação que a da evoluta! A igualdade que deduzimos é dada pela fórmula:  $ev_a(t) = H_{p/p-2q} \circ R_{q\pi/p} \circ \alpha(t + q\pi/p)$ .

A seguir, apresentaremos mais alguns exemplos que estudamos. Plotamos as curvas junto com suas respectivas evolutas e, também, os gráficos de suas curvaturas.

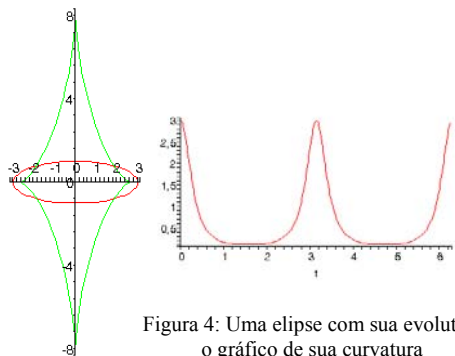


Figura 4: Uma elipse com sua evoluta e o gráfico de sua curvatura

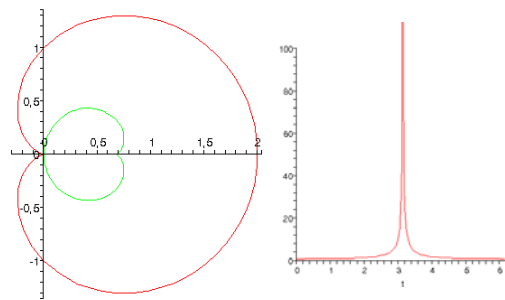


Figura 5: Um cardióide com sua evoluta e o gráfico de sua curvatura

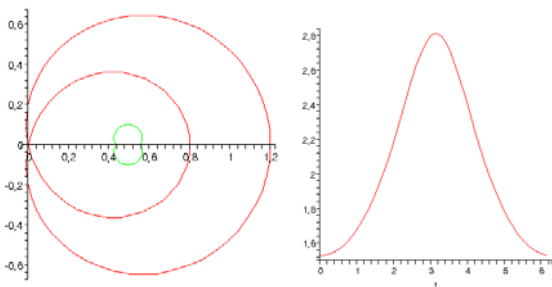


Figura 6: Limaçon de Pascal com sua evoluta e o gráfico de sua curvatura

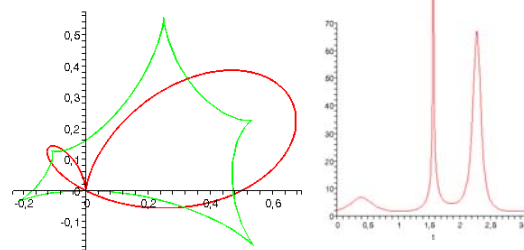


Figura 7: “Baleia” com sua evoluta e o gráfico de sua curvatura

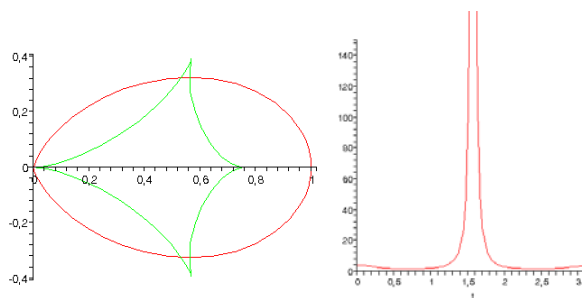


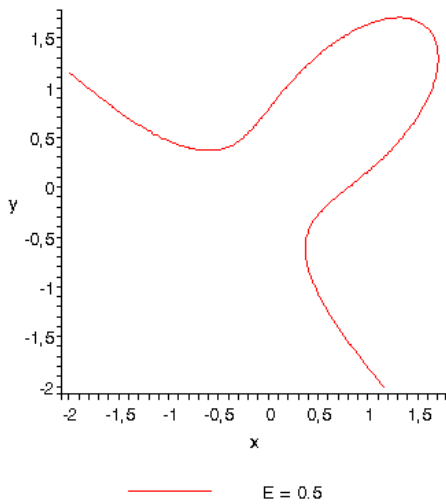
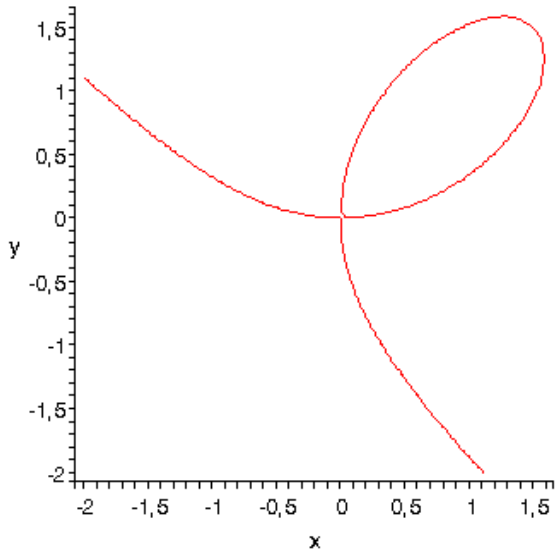
Figura 8: Ovóide com sua evoluta e o gráfico de sua curvatura

### Curvas Definidas Implicitamente

Paralelamente, estudamos **curvas definidas implicitamente**, que são curvas formadas pelo conjunto de zeros de uma função diferenciável de duas variáveis. Essas curvas são estudadas por essa definição por não haver uma parametrização natural para a curva. Duas curvas foram estudadas para esse caso: O Folium de Descartes e as Ovais Cassinianas.

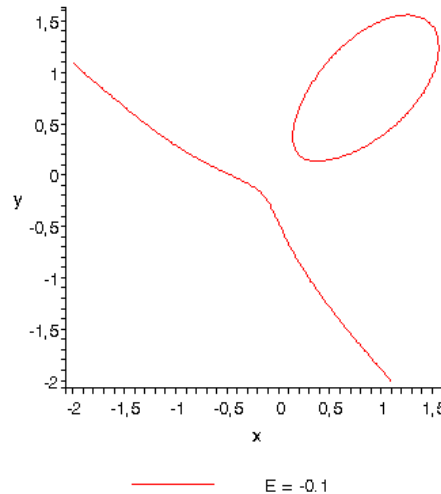
O Folium de Descartes tem como equação implícita  $x^3 + y^3 = 3xy$ .

Fazendo uma análise mais profunda na curva, encontramos algumas situações importantes: Ao acrescentarmos uma constante  $E$  à equação ( $x^3 + y^3 = 3xy + E$ ) percebemos um comportamento completamente diferente do visto na figura ao lado, que possui  $E=0$ . Quando  $E$  é positiva, temos a curva com a seguinte configuração: Curva totalmente contínua, sem nenhuma auto-interseção, comprovado analiticamente (Figura abaixo).



gor

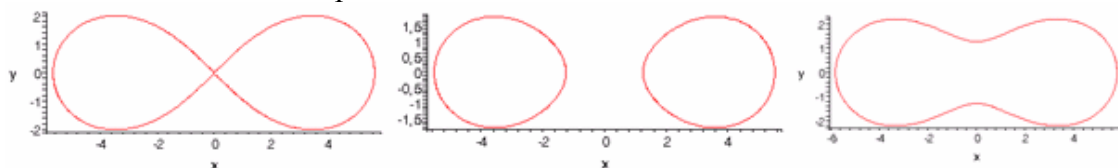
a, se analisarmos a curva para  $E$  negativa, temos duas curvas desconexas, uma aberta e outra fechada. Em ambas as curvas não há auto-interseção, e isso foi comprovado analiticamente (Figura abaixo).



A oval cassiniana é a generalização da Lemniscata de Bernoulli, e também da elipse. Sua equação é desta maneira:  $\text{distância}((x, y), F_1) \cdot \text{distância}((x, y), F_2) = b^2$ , onde  $F_1$  e  $F_2$  são os focos cuja distância é  $2a$ , e  $b$  é uma constante. Considerando os focos pertencentes ao eixo  $x$ , temos a seguinte equação implícita:  $(x^2 + y^2)^2 + 2a^2(y^2 - x^2) = b^4 - a^4$ . A relação entre  $b$  e  $a$  nos fornece diferentes curvas.

As figuras abaixo mostram os três casos para as ovais cassinianas. No primeiro caso temos  $a=b=4$ , a Lemniscata de Bernoulli, que é uma curva com um ponto de auto-interseção. No segundo caso, temos  $a>b$ , mais precisamente,  $a=4$  e  $b=3.8$ . Se formou duas curvas desconexas e refletidas em relação ao eixo  $y$  que não possuem auto-interseção. No terceiro e último caso, temos  $a<b$ , mais precisamente,  $a=4$  e  $b=4.2$ . Se

torna uma curva simples fechada, sem auto-interseções. Todas as afirmações citadas neste relatório foram comprovadas analiticamente.



### Involuta

Depois, estudamos o conceito de **involuta** de uma curva  $\alpha$ . Involuta é a curva obtida deslocando-se cada ponto de  $\alpha$ ,  $P=\alpha(t)$ , na direção tangente à curva (no sentido positivo), uma distância igual a  $t-t_0$ , onde  $C=\alpha(t_0)$  é um ponto arbitrariamente escolhido da curva. Como a involuta depende do ponto  $C$  escolhido, existem infinitas curvas que são involutas de uma curva  $\alpha$ , e elas são curvas paralelas entre si. Curvas paralelas são as curvas obtidas deslocando-se cada ponto de  $\alpha$ , na direção normal a  $\alpha$ ,  $\varepsilon$  unidades ( $\varepsilon$  pequeno). Verificamos que, analogamente à relação entre derivada e integral, a involuta é a inversa da evoluta, a menos de uma constante: a evoluta da involuta de uma curva  $\alpha$  é a própria curva  $\alpha$ , e a involuta da evoluta de uma curva  $\beta$  é  $\beta$  ou uma curva paralela a  $\beta$ .

### Teoremas Importantes

Finalmente, estudamos o **Teorema dos Quatro Vértices**, que afirma que toda curva plana fechada, regular e simples (sem auto-interseções) possui pelo menos quatro vértices (pontos críticos) de curvatura. Vimos, primeiro, uma demonstração para as curvas convexas e, depois, uma demonstração para todas as curvas simples, que envolve a demonstração de que todo conjunto de pontos de  $R^2$  possui exatamente um *círculo circunscrito*. Entendemos o teorema e as demonstrações, e o porquê dele não valer para curvas com auto-interseções. Um exemplo clássico de uma curva com quatro vértices é o da elipse (Figura 4). A *Limaçon de Pascal* é um exemplo de uma curva com auto-interseção que possui apenas dois vértices de curvatura, como é possível ver na Figura 6. Sabemos, no entanto, que toda curva plana regular e fechada possui pelo menos dois vértices, porque a função curvatura  $k: [a,b] \rightarrow R$ , como é uma função contínua definida em um conjunto compacto, possui pelo menos um máximo e um mínimo.

Para finalizar o estudo das curvas planas, estudamos o **Teorema Fundamental das Curvas Planas**, que diz que a curvatura determina completamente *uma* curva no plano, a menos de um movimento rígido de  $R^2$ . Ou seja, dada uma função diferenciável  $k_0: (a,b) \rightarrow R$ , existe exatamente uma curva plana (a menos de um movimento rígido)  $\alpha: (a,b) \rightarrow R$  cuja função curvatura,  $k_\alpha(s)$ , é igual a  $k_0(s)$  em todo o domínio. Estudamos e entendemos duas diferentes abordagens da demonstração desse teorema. Explicar duas abordagens: função angulo e EDOs, explicada melhor para curvas no espaço.

### Curvatura e Torção de curvas no espaço

Nosso trabalho se procedeu com o estudo das curvas no espaço. Primeiro, entendemos os conceitos de **curvatura** e **torção** para uma curva no espaço  $\alpha$ . Adotamos, novamente, um sistema de referência móvel, o *triedro de Frenet*, que é uma base ortonormal dada pelos vetores  $T(s)$ ,  $N(s)$  e  $B(s)$  (respectivamente vetor tangente, vetor curvatura e produto vetorial entre  $T$  e  $N$  em cada ponto de  $\alpha$ ). Para entender melhor o conceito de torção, foi fundamental conhecermos a definição de **plano osculador**, que é o plano gerado por  $T(s)$  e  $N(s)$ . Utilizando este conceito, é possível definir *torção* como sendo a medida de quanto uma curva está “saindo”, ou “furando”,

seu **plano osculador**. Depois, chegamos às equações analíticas para a curvatura  $k_\alpha$  e para a torção  $\tau_\alpha$  de uma curva no espaço  $\alpha$ . Analisamos, com o auxílio do MAPLE, diversos exemplos para apurar nosso entendimento sobre os dois conceitos.

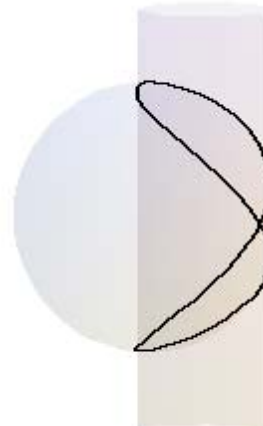
O estudo seguinte de **tubos**, gerados por círculos de raio  $\varepsilon$  pequeno centrados em cada ponto de uma dada curva  $\alpha$ , foi nosso primeiro *link* para o estudo das superfícies e nos ajudou a entender ainda melhor os conceitos de curvatura e torção. A expressão analítica de um tubo de raio  $\varepsilon$  em torno de uma curva  $\alpha$  é  $Tubo_{\alpha,\varepsilon}(t,\theta)=\alpha(t)+\cos\theta\cdot N(t)+\sin\theta\cdot B(t)$ . Pelo *Teorema de Fubini*, o volume de um tubo depende apenas do comprimento da curva  $\alpha$  e do raio  $\varepsilon$ , não dependendo da curvatura e da torção.

### Teorema Fundamental das Curvas no Espaço

Depois, utilizando as definições de  $T$ ,  $N$  e  $B$  e de *curvatura* e *torção*, deduzimos as **Equações de Frenet**:  $T'=kN$ ,  $N'=-kT+\tau B$ ,  $B'=-\tau N$ . A partir dessas equações, pudemos estudar o **Teorema Fundamental das Curvas no Espaço**, que afirma que a curvatura e a torção determinam completamente uma curva no espaço, a menos de um movimento rígido de  $R^3$ . Ou seja, dadas duas funções diferenciáveis  $k_o: (a,b)\rightarrow R$  e  $\tau_o: (a,b)\rightarrow R$ , existe exatamente uma curva  $\alpha: (a,b)\rightarrow R^3$  (a menos de um movimento rígido) que possui curvatura  $k_\alpha=k_o$  e torção  $\tau_\alpha=\tau_o$ . A demonstração desse teorema envolve diretamente o *Teorema da Existência e Unicidade das Equações Diferenciais Ordinárias*, que é usado para mostrar que, dadas duas funções  $k_o$  e  $\tau_o$  e assumida a existência de três vetores  $T(s)$ ,  $N(s)$  e  $B(s)$  com condições iniciais conhecidas em  $s_o$ , existe exatamente uma solução  $\{T,N,B\}$  que satisfaz as Equações de Frenet, usando  $k_o$  e  $\tau_o$ . Ele é usado novamente para mostrar que se  $T$ ,  $N$  e  $B$  formarem uma base ortogonal orientada positivamente em  $s_o$ , eles farão o mesmo para todo  $s$  no domínio. Depois, é fácil demonstrar que esses três vetores podem ser vistos como o *triedro de Frenet* de uma curva no espaço  $\alpha$  e que, se existisse uma segunda curva  $\beta$  com o mesmo *triedro*, uma simples composição de rotação com translação levaria  $\beta$  em  $\alpha$ . Assim, fica provado que, a menos de um movimento rígido, existe uma única curva em  $R^3$  com curvatura  $k_o$  e torção  $\tau_o$ , demonstrando o teorema.

### Exemplos

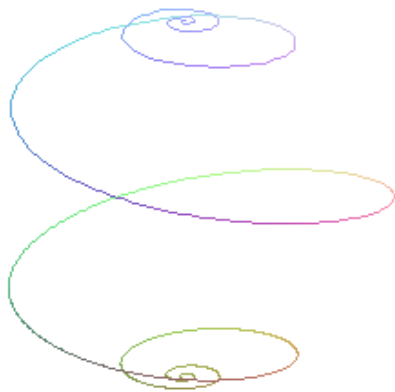
Para entender melhor os conceitos estudados das curvas no espaço, focamos principalmente nos exemplos da *hélice* e da *curva de Viviani*. A *hélice* é uma curva que possui curvatura e torção constantes, e, também, *pitch* (inclinação) constante, que é a relação entre quanto ela “sobe” e quanto ela “anda para o lado” ou “gira”, informalmente falando. Isto significa que ela faz ângulos constantes com os meridianos e paralelos. Nos casos extremos, a *hélice* é uma reta se a curvatura for nula e um círculo se a torção for nula. Devido ao Teorema Fundamental, sabemos que a *hélice* é a única curva em  $R^3$  com curvatura e torção constantes. Notamos que a *hélice*, como sua projeção no plano é um círculo, existe sobre cilindros, e que ela é invariante por “screw motions”, composições de rotações e translações, devido ao seu *pitch* constante. A *curva de Viviani* é a interseção de uma esfera de raio  $2a$  centrada na origem com um cilindro vertical de raio  $a$  centrado no ponto  $(a,0,0)$ . Estudando principalmente seu ponto de auto-interseção, percebemos que sua curvatura nesse ponto é  $1/2a$ , que é igual às **curvaturas médias** do cilindro e da esfera, conceito que viemos a estudar posteriormente. Adiantando uma



Curva de Viviani, para  $a=2$

conclusão a que chegamos, aprendemos que dadas duas direções, ortogonais entre si, do plano tangente de uma superfície em um ponto  $P$ , a semi-soma das curvaturas nessas direções é a curvatura média. Portanto, como o vetor tangente à curva em um ponto pertence ao plano tangente das duas superfícies, e os dois “ramos” da *curva de Viviani* possuem curvatura  $1/2a$  no ponto em questão, concluímos os dois “ramos”, nesse ponto, são ortogonais entre si, pois a semi-soma das duas curvaturas é igual à curvatura média.

Em seguida, antes de estudar a fundo superfícies, vimos mais alguns exemplos e conceitos que ainda lidam com curvas, mas que nos familiarizaram cada vez mais com superfícies. Estudamos, a princípio de forma intuitiva, os conceitos de **geodésicas** e **isometrias**, que serão explicados depois, e estudamos mais algumas curvas sobre



Loxodrômica numa esfera

superfícies, como as *loxodrômicas* sobre uma esfera e as próprias geodésicas de certas superfícies. As *loxodrômicas* são curvas que fazem ângulos constantes com os meridianos (e paralelos) da esfera. Fomos introduzidos à *projeção esfereográfica*, que é uma **aplicação conforme** (preserva ângulos) da esfera, menos o pólo norte, no plano. Como as *espirais logarítmicas*, cuja equação conhecemos, são as curvas que fazem ângulos constantes com os raios do plano, deduzimos que elas são a *projeção esfereográfica* das *loxodrômicas*, o que nos possibilitou chegar à expressão analítica destas. Uma segunda maneira pela qual deduzimos a equação das *loxodrômicas* requer um conhecimento de **métrica**

de uma superfície, para entender o conceito de ângulos sobre uma superfície. Ela consiste em descobrir qual é a curva que faz ângulos constantes com os meridianos, cujo vetor tangente passamos a conhecer após iniciado o estudo de métrica.

### Primeira Forma Fundamental das superfícies

Seguimos, então, com o estudo da **Primeira Forma Fundamental**, que diz respeito à **métrica** de uma superfície. Comprimentos, distâncias e áreas medidas sobre uma superfície  $S$  dependem de sua métrica. Uma superfície  $S$  depende de dois parâmetros, levados em  $R^3$  por  $X(u,v)$ . Derivando-se  $X$  parcialmente por  $u$  e por  $v$ , obtem-se, respectivamente, os vetores  $X_u$  e  $X_v$ , que geram o plano tangente a  $S$  em cada ponto  $P$ , denotado por  $T_P S$ . Os três coeficientes da Primeira Forma Fundamental dependem diretamente de  $X_u$  e de  $X_v$ :  $E = X_u \cdot X_u = |X_u|^2$ ,  $F = X_u \cdot X_v$  e  $G = X_v \cdot X_v = |X_v|^2$ , onde o ponto significa o produto escalar.

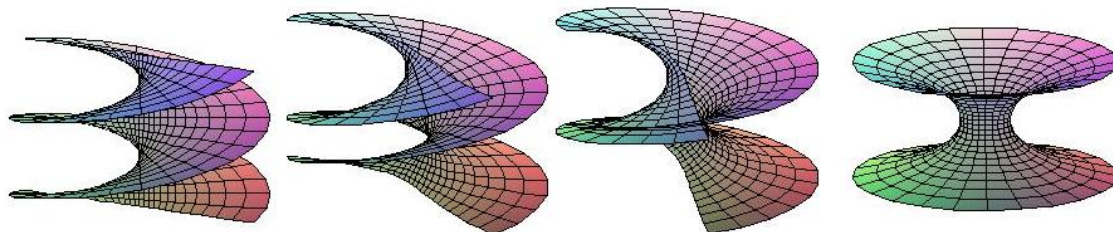
**Isometrias** são aplicações de uma superfície em outra que preservam localmente distâncias, comprimentos de arcos e áreas de regiões. Portanto, a Primeira Forma Fundamental é preservada por isometrias. O exemplo mais intuitivo são as isometrias existentes entre o plano e o cilindro – diz-se que eles são **localmente isométricos**. É fácil visualizar que é possível “abrir” um cilindro até torná-lo um plano, sem deformá-lo. Outro exemplo intuitivo de superfícies localmente isométricas é o do plano e o cone. É visivelmente possível “retirar” uma geratriz de um cone e “abri-lo”, gerando um setor circular plano. Encontrar explicitamente uma isometria já não é tão trivial, tarefa que cumprimos para esses dois pares após ter estudado o conceito de métrica de uma superfície.

Primeiramente, a isometria mais simples que leva um plano em um cilindro de raio  $1$  é  $Cil(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$ . É fácil verificar que, no plano, os coeficientes da Primeira Forma Fundamental são  $E=1$ ,  $F=0$  e  $G=1$  e que o mesmo se segue para o

cilindro  $Cil$ . Logo, as duas superfícies são localmente isométricas. Buscamos outra isometria, mais geral, entre o plano e o cilindro de raio  $g$ , dada por:  $Cil_2: (u,v) \mapsto (g \cdot \cos(au+bv), g \cdot \sin(au+bv), cu+dv)$ . Chegamos à conclusão de que essa isometria existe sob as seguintes condições:  $g > 0$ ,  $0 \leq a \leq 1/g$  e  $b = -\sqrt{(1-g^2a^2)}/g$ ,  $c = \sqrt{(1-g^2a^2)}$  e  $d = g \cdot a$ . Assim, temos  $E=1$ ,  $F=0$  e  $G=1$ , como desejado. Esta é forma mais genérica de se parametrizar um cilindro vertical centrado no eixo- $z$  com  $\partial/\partial u$  e  $\partial/\partial v$  ortonormais entre si (ou seja,  $E=1$ ,  $F=0$  e  $G=1$ );  $Cil$  é um caso particular de  $Cil_2$ , com  $g=a=1$ , e, conseqüentemente,  $b=c=0$  e  $d=1$ .

Em seguida, partimos à busca de uma isometria entre o plano e o cone. Após tentativa e erro, percebemos que o plano precisa ser parametrizado de forma polar:  $Plano(r,\theta) = (r \cdot \cos\theta, r \cdot \sin\theta)$ . Isso faz sentido, pois é um *setor circular* do plano que seria “dobrado” para formar um cone. O cone, então, tem que ser parametrizado da seguinte forma:  $Cone(r,\theta) = (r \cdot \cos\gamma \cdot \cos(\theta/\cos\gamma), r \cdot \cos\gamma \cdot \sin(\theta/\cos\gamma), r \cdot \sin\gamma)$ , onde  $\gamma$  é o ângulo que o cone faz com a superfície horizontal e  $\beta = \pi - 2\gamma$  é o ângulo interno do cone. Para ambas as superfícies, temos que  $E=1$ ,  $F=0$  e  $G=r^2$ , significando que a aplicação que leva de  $Plano$  em  $Cone$  é, de fato, uma isometria! Os parâmetros  $r$  e  $\theta$  variam nos intervalos  $[0, \infty)$  e  $[0, 2\pi \cdot \cos\gamma]$ , respectivamente. Assim, podemos inferir o “tamanho”, em radianos, do setor circular que é levado em um cone de ângulo interno  $\beta$ :  $\alpha = \theta_{\max} = 2\pi \cdot \cos\gamma = 2\pi \cdot \sin(\pi/2 - \gamma) = 2\pi \cdot \sin(\beta/2)$ .

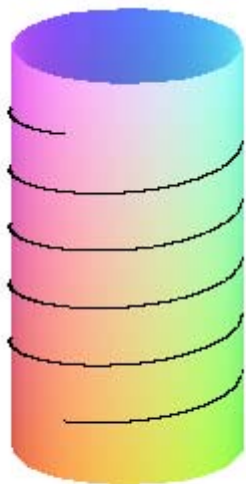
Também estudamos, de forma menos intensa, uma família, a 1-parâmetro, de superfícies localmente isométricas: a família *catenóide-helicóide*. O *catenóide* é a **superfície de revolução** gerada pela *catenária*, e o *helicóide* é obtido a partir da *hélice*, e pode ser visto girando uma reta ortogonal ao eixo, e ao mesmo tempo levantando-a com velocidade constante. Aprendemos que essa família é de **superfícies mínimas** (*curvatura média 0*), conceito que estamos apenas começando a estudar. Na figura abaixo temos a família *catenóide-helicóide*, sendo que a primeira superfície é o helicóide e a última é o catenóide.



### Geodésicas

**Geodésicas** são curvas que minimizam, localmente, distâncias sobre superfícies.

Ou seja, dados dois pontos quaisquer (próximos) de uma superfície, a curva que minimiza a distância entre eles, se existir, é uma geodésica. Por exemplo, as geodésicas no plano são as retas, pois, dados dois pontos quaisquer, o “menor caminho” entre eles é a linha reta que os une. Partimos para o estudo das geodésicas de um cilindro. Como ele é isométrico ao plano e *isometrias preservam distâncias*, a menor distância entre dois pontos quaisquer no cilindro tem que ser dado pelas imagens das retas, por uma isometria, no cilindro. Pela isometria mais simples, explicitada acima ( $Cil$ ), retas horizontais são levadas em círculos (os paralelos), retas verticais são levadas



O Cilindro e a hélice, uma de suas geodésicas

em retas verticais (os meridianos) e todas as outras retas, como têm inclinação constante, são levadas nas curvas sobre cilindros com inclinação constante: as *hélices*. Como estas incluem os círculos e as retas, concluímos que as geodésicas de um cilindro são as *hélices*. Em seguida, partimos para a análise das geodésicas de um cone. Após uma análise quase somente visual, chegamos a um resultado interessante: independente do ângulo interno  $\beta$  do cone, as geodésicas são todas do mesmo tipo, variando somente o número de voltas que elas dão no cone antes de serem assintóticas a um meridiano. Os meridianos também são geodésicas, mas os paralelos não são.

Depois, estudamos as geodésicas sob outra ótica: elas são as curvas cuja componente da aceleração no plano tangente da superfície é nula. Chegamos a um sistema de duas equações diferenciais de segunda ordem que depende apenas da métrica de uma superfície. Por ela, é possível obter as geodésicas de qualquer superfície. Vimos que essas equações são muito simplificadas para superfícies de revolução.

### Curvatura de Superfícies e Segunda Forma Fundamental

Primeiramente, para estudarmos com mais detalhes a curvatura de superfícies e a segunda forma fundamental, definiremos o *Shape Operator*. *Shape Operator* é uma aplicação auto-adjunta que determina o quanto a superfície se curva numa direção tangente  $\mathbf{v}$  num ponto  $\mathbf{P}$  da superfície. Essa aplicação leva um vetor do plano tangente à superfície ao mesmo plano tangente. A fórmula para o cálculo do *Shape Operator* é  $S(\mathbf{v}_P) = -D_{\mathbf{v}_P} \mathbf{N}$  (Derivada de  $\mathbf{N}$  na direção  $\mathbf{v}_P$ ), onde  $\mathbf{N}$  é o normal unitário da superfície no ponto  $\mathbf{P}$ . Caso a superfície seja localmente definida  $X : (u, v) \rightarrow (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , vimos que o *Shape Operator* nas direções tangentes adaptadas  $X_u(u, v)$  e  $X_v(u, v)$  fica

$$S(X_u) = -N_u \text{ e } S(X_v) = -N_v$$

Para o estudo de **Curvatura de Gauss** e **Curvatura Média**, definimos **curvatura normal**, que nos dá um valor escalar da curvatura da superfície na direção  $\mathbf{v}$  num ponto  $\mathbf{P}$ . É expresso por:

$$k(\mathbf{v}) = \frac{S(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}$$

O máximo e o mínimo valor da curvatura normal são chamados de **curvaturas principais**  $k_1$  e  $k_2$  (Os vetores normalizados para esses casos  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$  são chamados de direções principais). Uma curva principal na superfície é a curva cujo traço pertence à superfície e o vetor tangente é principal em todos os pontos.

A Segunda Forma Fundamental definida numa superfície localmente definida é dada pelas fórmulas

$$\begin{aligned} e &= S(X_u) \cdot X_u = N \cdot X_{uu} \\ f &= S(X_v) \cdot X_u = S(X_u) \cdot X_v = N \cdot X_{uv} \\ g &= S(X_v) \cdot X_v = N \cdot X_{vv} \end{aligned}$$

e  $e, f$  e  $g$  são chamados de **coeficientes da Segunda Forma Fundamental**.

Como já havia sido dito antes, o *Shape Operator* é uma aplicação auto-adjunta. Por causa disso, podemos afirmar que seus autovalores são reais. Seus autovalores são as curvaturas principais, e seus autovetores correspondentes são as direções principais. Com esse conhecimento acumulado sobre *Shape Operator* e Segunda Forma Fundamental pudemos definir **curvatura de Gauss** e **curvatura média** das superfícies.

A Curvatura de Gauss  $K$  e a curvatura média  $H$  no ponto  $\mathbf{P}$  são dadas por

$$K(P) = \det(S(P)) \text{ e } H(P) = \frac{1}{2} \text{tr}(S(P))$$

Como o determinante e o traço de uma matriz é, respectivamente, o produto e soma dos autovalores da mesma, temos que

$$K = k_1 k_2 \text{ e } H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

Com esse conceitos definidos, podemos entrar no estudo de **superfícies mínimas**, que são superfícies de menor área numa dada fronteira e possui curvatura média **nula**. Um exemplo de superfície mínima é o *catenóide*, cuja curva geratriz é a *catenária*. Mostramos que o catenóide é a única superfície mínima de revolução. Sua parametrização é dada por

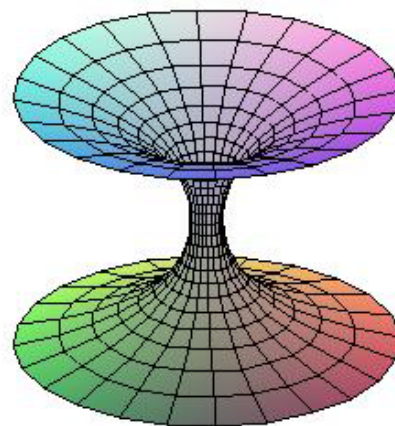
$$X(u, v) = \left( -c \sin(u) \cosh\left(\frac{v}{c}\right), c \sin(u) \cosh\left(\frac{v}{c}\right), v \right)$$

Suas curvaturas principais são

$$k_1 = -k_2 = \frac{1}{c \left( \cosh\left(\frac{v}{c}\right) \right)^2}$$

Assim, podemos perceber que sua curvatura de Gauss e curvatura Média são

$$K = \frac{1}{c^2 \left( \cosh\left(\frac{v}{c}\right) \right)^4} \text{ e } H = 0$$



O Catenóide

### Superfície de Revolução

Estudamos as superfícies de revolução com enfoque na Primeira e Segunda Forma Fundamental, além de analisarmos suas curvaturas de uma forma mais geral. Para isso, utilizamos a parametrização padrão das superfícies de revolução que é

$$X(u, v) = (\cos(u)\varphi(v), \sin(u)\varphi(v), \psi(v))$$

onde  $\varphi(v)$  e  $\psi(v)$  vêm da parametrização da curva geratriz da superfície  $\alpha(v) = (\varphi(v), \psi(v))$  e  $u$  é o ângulo de giro da curva no espaço em torno do eixo  $z$ . Com essa parametrização, conseguimos provar que seus vetores tangentes adaptados são as direções principais da superfície. A Primeira Forma Fundamental fica dessa maneira

$$E = \varphi'^2, F = 0 \text{ e } G = \varphi'^2 + \psi'^2$$

e a segunda forma fundamental fica dessa maneira

$$e = \frac{-\varphi\psi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}, f = 0 \text{ e } g = \frac{\varphi''\psi' - \varphi'\psi''}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}.$$

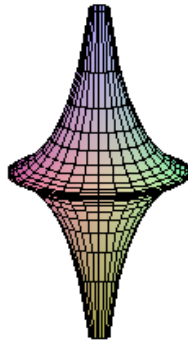
Sabendo que as direções principais são  $X_u$  e  $X_v$ , o cálculo da curvatura normal nessas direções nos fornecerá as curvaturas principais. Temos que

$$k_1 = \frac{S(X_u) \cdot X_u}{\|X_u\|^2} = \frac{e}{E} \text{ e } k_2 = \frac{S(X_v) \cdot X_v}{\|X_v\|^2} = \frac{g}{G}.$$

Assim, temos mais facilmente as curvaturas de Gauss e Média.

Um exemplo interessante é a *Pseudo-esfera*, superfície de revolução de curvatura de Gauss  $-1$  cuja curva geratriz é a tractrix. Sua parametrização é dada

$$\text{por } X(u, v) = \left( \cos(u)\sin(v), \sin(u)\sin(v), \cos(v) + \ln\left(\tan\left(\frac{1}{2}v\right)\right)\right), v \in [0, \pi]$$



A Pseudo-esfera

### **Referências**

1. DO CARMO, M. P. **Elementos de geometria diferencial**. Rio de Janeiro: Ed. Universidade de Brasília, 1979. 205p.
2. GRAY, A, ABBENA, E. e SALAMON, S. **Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica**. 3 ed. Florida: Chapman & Hall/CRC, 2006. 984p.
3. MONTIEL, S. e ROS, A. **Curves and Surfaces**. American Math. Society, 2005. 376p.