O TEOREMA DE EQUILÍBRIO DE NASH

Aluno: Pedro Henrique de Castro Simões
Orientador: Flávio Abdenur

Introdução

Estudamos, ao longo do segundo semestre de 2006, tópicos em análise real na reta. Com as ferramentas adquiridas, nos dedicamos desde janeiro de 2007 ao estudo dos conceitos matemáticos presentes na teoria dos jogos e, principalmente, naqueles em que se baseia o conceito de *equilíbrio de Nash*. Com o exemplo simples (mas altamente esclarecedor e de fácil extensão para n jogadores) de dois jogadores, mostramos primeiramente as condições que devem ser atendidas por domínios, estratégias e pelas funções de utilidade para que exista um equilíbrio de Nash. Finalmente, utilizando o teorema do ponto fixo de Brouwer, provamos a existência de tal equilíbrio.

Teoria dos Jogos

A *teoria dos jogos* é uma teoria matemática utilizada para modelar fenômenos que se manifestam quando dois ou mais agentes de decisão interagem entre si. Ao utilizar esses modelos, podemos formular uma linguagem comum aos mais diferentes tipos de jogos, o que facilita o estudo e análise dos resultados dessas interações. Apesar de ser um campo de estudo intimamente ligado à matemática, o escopo das áreas onde se aplica a teoria dos jogos é tão extenso quanto diversificado. O resultado de eleições, a dominância de uns genes sobre outros na evolução genética, a dinâmica dos leilões, a filosofia, a antropologia, as fontes de informações do jornalismo e importantes conceitos econômicos são exemplos dessas áreas. Mas, afinal, o que é um jogo?

Formalmente falando, um jogo tem alguns elementos básicos: um *conjunto finito de jogadores* definido por $G = \{g_1, g_2, \dots , g_n\}$. Cada jogador $g_i \in G$ possui um *conjunto finito de estratégias* $S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, \dots , s_{im_i}\}$. O conjunto de todos os conjuntos de estratégia forma, assim, o produto cartesiano

$$S = \prod_{i=1}^{n} S_i = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n,$$

chamado de espaço de estratégia do jogo. Para cada jogador $g_i \in G$ existe uma função de utilidade

$$U_i: S \rightarrow \mathbb{R}$$
$$\mathbf{s} \rightarrow U_i(\mathbf{s})$$

que nos dá o "bem estar" ou *payoff* $U_i(\mathbf{s})$ imagem de um vetor $\mathbf{s} \in S$ para o jogador g_i associado a esse perfil de estratégia.

Dados esses elementos, podemos notar que o resultado do jogo para cada um dos jogadores g_i não depende apenas de suas escolhas individuais, s_{imi}, e sim do "encontro" das escolhas de todos os jogadores de G. Representamos esse encontro pelo vetor $\mathbf{s}$.

O jogo que acabamos de definir possui estratégias discretas e finitas. No entanto, mais importante para este projeto é trabalhar com jogos em que as opções de estratégia de cada jogador estejam em conjuntos contínuos e, portanto, todos os jogadores tenham a sua disposição infinitas estratégias dentro de um intervalo. Em uma definição mais formal, continuamos com um conjunto finito de jogadores definido por $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$. Cada jogador $g_i \in G$ possui agora um *intervalo compacto de estratégias* $I_i = [a_i, b_i]$. O conjunto de todos os intervalos forma, portanto, o produto cartesiano

$$I = \prod_{i=1}^{n} I_i = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n,$$

que podemos chamar de espaço de estratégia contínua do jogo. Vale ressaltar que o espaço gerado é compacto e convexo, pois é produto de intervalos também compactos e convexos. Para cada jogador $g_i \in G$ existe uma função de utilidade

$$U_i : I \to \mathbb{R}$$
$$\mathbf{x} \to U_i(\mathbf{x})$$

que nos dá o "bem estar" ou *payoff* $U_i(\mathbf{x})$ imagem de um vetor $\mathbf{x} \in I$ para o jogador g_i associado a esse perfil de estratégia, em que $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ com $x_i \in I_i$.

Um Breve Histórico

As primeiras referências conhecidas à teoria dos jogos datam do ano de 1713, na correspondência de James Waldegrave a Nicolas Bernoulli. Em carta, ele apresenta sua análise do jogo de cartas *Le Her*, para o qual propõe uma solução estratégica. Waldegrave, porém, não se aprofunda em uma análise teórica mais geral de suas conclusões.

Figura 1: James Waldegrave

O primeiro estudo mais formal em teoria dos jogos é um trabalho sobre o duopólio de Antoine Augustin Cournot, publicado em 1838. No entanto, apenas em 1913 foi publicado o primeiro teorema matemático sobre o tema, de autoria de Ernst Zermelo, que define o jogo de xadrez como *estritamente dominado*, isto é, um jogo em que a cada etapa da partida pelo menos um dos jogadores possui uma estratégia que lhe trará a vitória ou conduzirá o jogo ao empate. Emile Borel foi outro grande matemático que se interessou pelos jogos. Publicou quatro artigos sobre jogos estratégicos e acreditava que a guerra e a economia podiam ser estudadas de forma semelhante.

Apesar de todos estes avanços, a teoria dos jogos foi encarada como uma área menor da matemática ainda por muitos anos. Foi apenas com o matemático húngaro John Von Neumann que a situação começou a mudar. Com a publicação de uma série de trabalhos em 1928, ele provou, utilizando topologia e análise, a existência de solução em estratégias mistas (quando se leva em consideração a distribuição *probabilística* sobre as estratégias puras) para jogos finitos de soma-zero com dois jogadores. Em 1937, ele divulgou uma nova demonstração com o mesmo resultado, considerada mais clara, usando o *teorema do ponto fixo de Brouwer*.

Figura 2: John Von Neumann

Von Neumann dividiu com o economista Oscar Morgenstern a autoria do clássico *"The Theory of Games and Economic Behavior"*, publicado em 1944. A obra é considerada um marco na história da teoria dos jogos, devido ao enorme impacto no estudo da matemática aplicada e na teoria das decisões econômicas.

John Forbes Nash Jr., em uma série de estudos publicados ao longo do ano de 1950, realizou avanços enormes e definitivos. Dentre esses estudos, os de maior relevância para nossa análise são *"Equilibrium Points in n-Person Games"* e *"Non-cooperative Games"*, nos quais Nash provou a existência de equilíbrio para jogos não-cooperativos de estratégia mista. É justamente este equilíbrio que convencionamos chamar de *equilíbrio de Nash*.

Figura 3: John F. Nash Jr.

Por suas contribuições à teoria dos jogos, John Nash, John Harsanyi, e Reinhard Selten receberam o prêmio Nobel de economia em 1994.

Desenvolvimento

Antes de tudo, cabe uma definição. Um *equilíbrio de Nash* é uma situação na qual, dadas as decisões tomadas pelos outros competidores, nenhum jogador pode melhorar sua situação mudando sua própria decisão. Em outras palavras, não há incentivos para tal mudança. Utilizando a definição formal de um jogo já apresentada, podemos dizer:

Um vetor $\boldsymbol{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n) \in I_n$ é um *equilíbrio de Nash* se, para todo i, ocorre que

$$U_i(\overline{x}_i, \overline{x}_{-i}) \geq U_i(x_i, \overline{x}_{-i}) \;\; \forall x_i \in I_i,$$

em que "– *i*" representa todos os jogadores, exceto *i*.

O célebre "dilema dos prisioneiros", formulado por Albert W. Tucker em 1950, oferece uma boa ilustração deste conceito.

O dilema surge na seguinte situação: dois suspeitos, "A" e "B", são acusados de um mesmo crime. Presos em celas separadas e sem possibilidade de se comunicarem, uma proposta lhes é feita: cada um deles pode escolher entre confessar ou negar o crime. Se ambos negarem, serão presos por um ano. Se os dois confessarem, serão presos por três anos. Mas, se um deles confessar e o outro negar, o que confessou será libertado imediatamente enquanto o que negou será submetido à pena de 10 anos de prisão. Temos assim os seguintes resultados:

Prisioneiro B

	Confessar	Negar
Confessar	(-3, -3)	(0, -10)
Negar	(-10, 0)	(-1, -1)

Prisioneiro A

Tabela 1: Matriz de *payoff*s do Dilema dos Prisioneiros

Vemos na matriz de *payoffs* acima que, atendida a hipótese de ausência de um acordo prévio entre os prisioneiros, tenha o outro confessado ou negado, é sempre melhor confessar. Assim, o ponto (Confessar, Confessar) representa um exemplo de equilíbrio de Nash. Isso fica mais claro analisando a questão do ponto de vista de cada jogador. Eles raciocinam da seguinte maneira: *"O outro prisioneiro pode, assim como eu, negar ou confessar. Se ele confessar, o melhor que posso fazer é confessar também, já que ficarei preso por três anos no lugar de 10 anos. Se ele negar, o melhor para mim ainda é confessar, pois assim estarei livre em vez de condenado a um ano. Nos dois casos, o melhor é confessar, portanto, eu confessarei"*. Como ambos os prisioneiros, se forem racionais, pensarão dessa maneira, ficarão presos por três anos.

O resultado do dilema dos prisioneiros nos permite fazer observações bastante interessantes. Não é difícil perceber que o ponto de equilíbrio de Nash não é eficiente no sentido de Pareto, isto é, existe uma maneira de melhorar a situação de um dos jogadores sem piorar a situação do outro. De fato, o equilíbrio é o único que não é ótimo de Pareto! Na verdade, nesse jogo existe uma forma de melhorar a situação de ambos os jogadores concomitantemente. Se ambos cooperarem se deslocando para o ponto (Negar, Negar) terão dois anos a menos de pena. Mas por que isso não ocorre? A resposta reside no fato de que o ponto (Negar, Negar) não obedece à racionalidade. Estando nesse ponto, os dois terão um incentivo enorme a confessar o crime: sua liberdade. A desconfiança os leva a confessar o crime.

Vejamos agora outros exemplos de jogos. Há aqueles em que há mais de um equilíbrio de Nash e outros em que eles não existem para estratégias discretas, ou puras.

A "batalha dos sexos" descreve a seguinte situação: um casal deseja sair. Ele gosta mais de futebol e ela gosta mais de ir ao cinema. Se eles vão juntos ao futebol, ele tem satisfação maior que ela. Se forem ao cinema, ela tem satisfação maior que ele. Finalmente, se ambos saírem sozinhos, ficarão igualmente insatisfeitos. Podemos representar a situação na matriz de *payoffs*, em que os números representam uma ordenação de utilidades, a saber, $U_{ele}: S \to \mathbb{R}$ e $U_{ela}: S \to \mathbb{R}$..

Ela

Ele

	Futebol	Cinema
Futebol	(10, 5)	(0, 0)
Cinema	(0, 0)	(5, 10)

Tabela 2: Matriz de *payoffs* da Guerra dos Sexos

Observe que, nesse jogo, temos dois equilíbrios de Nash. Os pontos (Futebol, Futebol) e (Cinema, Cinema) satisfazem a definição formal discutida anteriormente. O que mais importa para este casal é estar junto. Se for no programa de sua preferência, tanto melhor.

Vejamos ainda o jogo "combinando moedas". Nesse jogo os competidores exibem, simultaneamente, as moedas que cada um tem em sua mão. Se ambas as moedas apresentam cara ou coroa, o jogador 2 dá sua moeda para o jogador 1. Se uma moeda apresenta cara e a outra apresenta coroa, o jogador 1 é que deve dar sua moeda para o jogador 2. Temos a seguinte matriz de *payoffs*:

Jogador 2

Jogador 1

	Cara	Coroa
Cara	(1, -1)	(-1, 1)
Coroa	(-1, 1)	(1, -1)

Tabela 3: Matriz de *payoffs* para Combinado Moedas

Note que, nesse jogo, os interesses dos jogadores são completamente opostos. O ganho de um é, sempre e na mesma medida, a perda do outro. Isso dificulta a existência de um equilíbrio, ao menos em estratégias discretas, como veremos mais adiante. Assim, o combinando moedas com estratégias puras é um jogo em que não há um equilíbrio de Nash.

A Demonstração

Todos os jogos apresentados até agora têm estratégias discretas (Confessar ou Negar), (Cinema ou Futebol), (Cara ou Coroa). Mais interessante e útil para nosso trabalho é ter estratégias contínuas que podem representar preços, decisões de produção ou qualquer outra situação em que os resultados individuais dependam das decisões de outros agentes.

Suponha um jogo com dois participantes, "1" e "2", que escolhem estratégias no intervalo [0,1]. Temos assim

$$I_1 = [0,1] \text{ e } I_2 = [0,1]$$

e o domínio $I_1 \times I_2$ será o quadrado compacto de lado 1. O bem-estar ou utilidade de cada jogador é dado pelas funções

$$U_1: I_1 \times I_2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ e } U_2: I_1 \times I_2 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Como vimos anteriormente na definição de um jogo, o bem-estar de cada jogador não depende somente da escolha que ele próprio faz, mas também da escolha feita pelo outro jogador.

A partir destas funções-utilidade, definimos agora

$$\Phi_1: I_2 \to I_1 \text{ e } \Phi_2: I_1 \to I_2$$

como sendo funções tais que, dada a decisão de um dos jogadores, Φ_i leva o outro a tomar uma decisão que maximize sua utilidade. Por exemplo: Φ_1 leva x^*_2 no único $\overline{x}_1$ que maximize a utilidade do jogador 1, ou seja, o ponto $(\Phi_1(x^*_2), x^*_2)$ será tal que

$$U_1(\overline{x}_1, x^*_2) \geq U_1(x_1, x^*_2) \ \forall \ x_1 \in I_1$$

e, equivalentemente, o ponto $(x^*_1, \Phi_2(x^*_1))$ será tal que

$$U_2(x^*_1, \overline{x}_2) \geq U_2(x^*_1, x_2) \ \forall \ x_2 \in I_2.$$

É fácil notar que $\overline{x}_i$ é melhor que qualquer outra estratégia à disposição do jogador i dado que o outro jogador escolheu a estratégia x^*_j.

Se considerarmos o produto $\Phi_1 \times \Phi_2$ obteremos uma aplicação

$$\Phi: I_1 \times I_2 \to I_1 \times I_2,$$

que leva o par (x^*_1, x^*_2) no par $(\Phi_1(x^*_2), \Phi_2(x^*_1))$; os pontos fixos desta aplicação serão equilíbrios de Nash no jogo. Logo a demonstração da existência de um equilíbrio de Nash se resume a obter um ponto fixo da aplicação $\Phi_1 \times \Phi_2$. De fato, o *teorema de Nash* nos dá a seguinte informação:

Teorema de Nash: Todo jogo finito, isto é, com finitos jogadores e um conjunto compacto e convexo de estratégias, tem uma solução em estratégias mistas.

A prova deste teorema utiliza conceitos que exigem matemática relativamente avançada. Em nossa demonstração, faremos uma hipótese adicional (a concavidade na própria estratégia) que facilitará enormemente a compreensão dos passos da demonstração, mas compromete em muito pouco a força do resultado final, que é a prova da existência do equilíbrio de Nash.

Algumas condições devem ser atendidas para que as Φ_i sejam realmente funções bem-definidas. Para garantir a boa-definição de Φ_i, as funções-utilidade U_1 e U_2 devem ser contínuas, pois segue então pelo *teorema de Weierstrass* que existem pontos que maximizam $U_1(\cdot, x^*_2)$ e $U_2(x^*_1, \cdot)$, já que I_1 e I_2 são compactos. No entanto, por si só a continuidade das funções-utilidade não é o bastante para afirmar que cada Φ_i é função bem-definida, pois podem existir vários pontos que maximizem Φ_i nos dados intervalos. Queremos, portanto, uma condição que garanta a unicidade do ponto maximizante de utilidade. Essa condição é a *concavidade* das funções-utilidade em cada estratégia. Como foi mencionado, a demonstração de Nash não tem essa condição como pré-requisito, pois qualquer jogo finito em estratégias mistas tem solução. No entanto, para nossos objetivos, ela é altamente válida e simplificadora. Nos termos formais de um jogo definidos anteriormente, isso quer dizer que, uma vez fixadas as escolhas de todos os outros jogadores "– *i*", a função $U_i(x_i, \overline{x}_{-i}): I_1 \to \mathbb{R}$ que relaciona unicamente as escolhas do jogador *i* com sua utilidade deve ser côncava em I_1. Observe dois casos extremos:

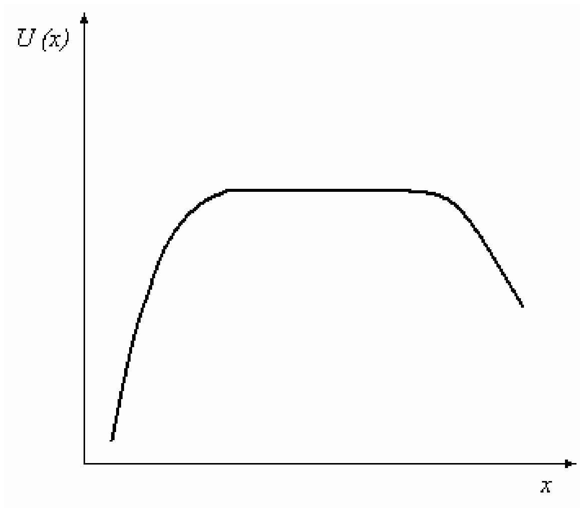

Figura 4: exemplo de infinitos máximos

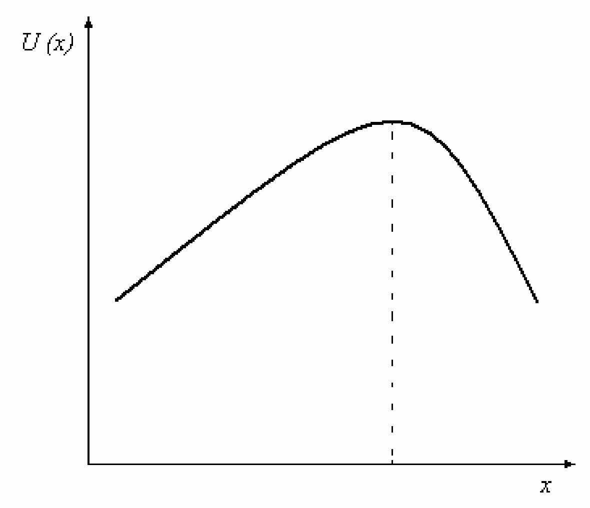

Figura 5: concavidade - um único máximo

Podemos provar que a concavidade implica na unicidade do ponto máximo demonstrando que se existissem dois máximos, por exemplo, em dado intervalo, a função não poderia ser côncava nesse mesmo intervalo.

Tome x e $y \in I$ tal que $x \neq y$, ambos pontos de máximo de $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em I, portanto,

$$f(x) = f(y) \geq f(z) \;\; \forall z \in I.$$

Dado $0 < t < 1$, da definição de *concavidade estrita* afirmamos que

$$f(t.x + (1 - t).y) > t.f(x) + (1 - t).f(y),$$

temos por hipótese que $f(x) = f(y)$ e x e y são máximos, um absurdo, já que esta última equação nos informa que uma média ponderada qualquer de x e y possui imagem de valor maior que $f(x) = f(y)$. Tal fato mostra que f só pode ter um máximo em I se f for côncava.

Para garantir a concavidade, bastará para nossos objetivos supor que a segunda derivada de U_i seja negativa no intervalo $[0, 1]$, uma vez fixada a escolha do outro jogador. Utilizaremos o teorema do valor médio para provar que $f''(x) < 0$ implica em concavidade. Suponha

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tal que } f''(x) < 0 \;\; \forall \; x \in [a, b].$$

Sabemos que f é côncava se

$$f(x) \leq f(a) + f'(a).(x - a),$$

ou seja, f é côncava se está localizada abaixo da reta que tangencia f no ponto a, fato ilustrado no seguinte gráfico de uma f qualquer:

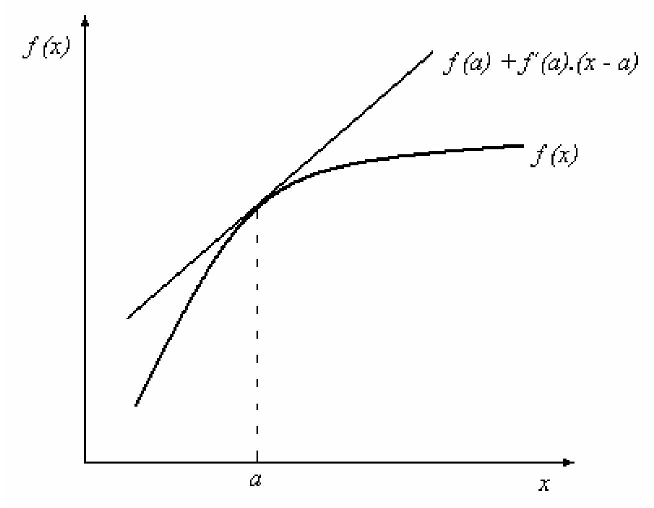

Figura 6

O *teorema do valor médio* garante que

$$\exists\ z \in (a, b) \text{ tal que } f'(z) = f(b) - f(a) / b - a.$$

Considere $f\,|_{(a,x]}$. Pelo teorema do valor médio

$$\exists\ z \in (a, x) \text{ tal que } f'(z) = f(x) - f(a) / x - a .$$

Remanejando a equação obtemos

$$f(x) = f(a) + f'(z).(x - a).$$

Como, por hipótese, $f'' < 0$ e $z > a$, podemos afirmar que $f'(z) < f'(a)$. Temos assim

$$f(x) = f(a) + f'(z).(x - a) < f(a) + f'(a).(x - a),$$

f, portanto, é côncava.

Estabelecidas as condições para a existência de Φ_1 e Φ_2, devemos nos voltar agora para a necessidade de sua continuidade. Para tanto, demonstramos que, com as hipóteses sobre as quais “construímos” as funções Φi, elas serão sempre contínuas. Utilizando agora a notação $x \in I_1$ e $y \in I_2$, no caso de Φ_1, teremos:

$$\Phi_1(y^*) = \bar{x} \in I_1 / U_1(\bar{x}, y^*) \geq U_1(x, y^*)\ \forall\ x \in I_1.$$

Afirmamos que $\Phi_1: I_2 \rightarrow I_1$ é contínua.

Suponha agora que a afirmação é falsa, ou seja, $\Phi_1: I_2 \rightarrow I_1$ não é contínua e, portanto, existe uma seqüência $y_n \in I_2$ tal que

$$y_n \rightarrow \mathbb{y} \text{ mas } \Phi_1(y_n) \not\rightarrow \Phi_1(\mathbb{y}).$$

Tomando uma subseqüência y_k de y_n temos $\Phi_1(y_k) \rightarrow \mathbb{x}$ em que $\mathbb{x}$ não é maximizante. Concluímos que

$$U_1(\Phi_1(y), y) \geq U_1(x, y) \text{ e também que } U_1(\Phi_1(y), y_n) \to U_1(\Phi_1(y), y),$$

já que $U_1: I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}$ é contínua. Logo vemos que, para n grande o suficiente:

$$U_1(\Phi_1(y), y_n) \to U_1(\Phi_1(y), y) \text{ e } U_1(\Phi_1(y_k), y_k) \to U_1(x, y), \text{ com } U_1(\Phi_1(y), y) \geq U_1(x, y),$$

o que é um absurdo já que Φ_1 foi construída como uma função maximizadora. O mesmo se pode afirmar a respeito de Φ_2. Φ_i são, portanto, funções contínuas.

Uma vez que a existência e a continuidade de Φ_1 e Φ_2 estejam garantidas, precisamos de um argumento para garantir a existência de um ponto fixo de $\Phi_1 \times \Phi_2$, ou seja, de um equilíbrio de Nash. Utilizamos para tanto o seguinte teorema:

Teorema do Ponto Fixo de Brouwer: Seja B conjunto compacto e convexo. Se $f: B \to B$ é uma aplicação contínua. Então existe $x \in B$ tal que $f(x) = x$.

Parte final da demonstração do Teorema de Brouwer. Provaremos o teorema no caso em que B é uma bola fechada, e tomando como fato a seguinte (e difícil) proposição: se B é compacto então não existe nenhuma aplicação contínua $f: B \to \partial B$ tal que $f|_{\partial B} = id|_{\partial B}$. A Figura 7 ilustra essa “impossibilidade”:

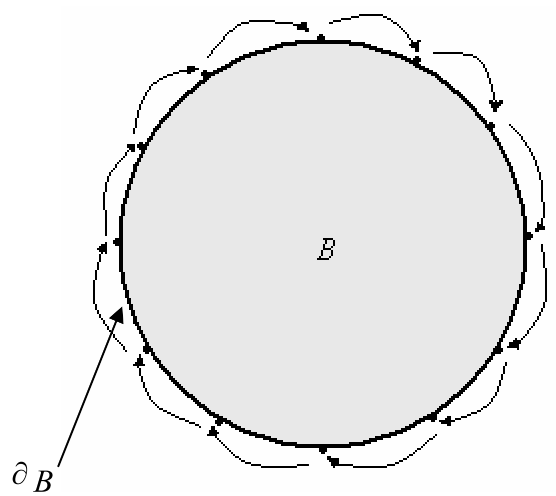

Figura 7

Supomos, por contradição, que existe aplicação contínua $f: B \to B$ tal que f não possui nenhum ponto fixo, ou seja, $f(x) \neq x$ para todo $x \in B$. Definimos então $g: B \to \partial B$ da seguinte maneira: *$g(x)$ = interseção com ∂B do segmento de reta que começa em $f(x)$ e passa por x*.

Intuitivamente vemos que g é contínua e, se $x \in \partial B$, vale que $g(x) = x$. Então g é contínua e $g|_{\partial B} = id|_{\partial B}$, o que contradiz o fato citado cima.

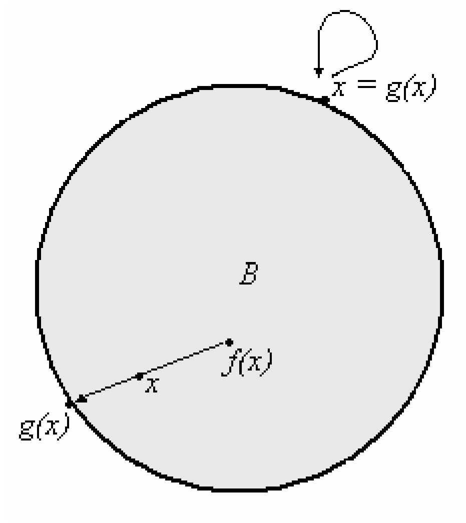

Figura 8: A função *g: B* $\rightarrow \partial$ *B*

Como no contexto de nosso jogo o domínio $I_1 \times I_2$ é compacto e convexo e a aplicação $\Phi\colon I_1 \times I_2 \rightarrow I_1 \times I_2$ é contínua, pois é o produto de duas funções contínuas Φ_1 e Φ_2, podemos, pelo teorema do ponto fixo de Brouwer, afirmar que existe um ponto $\vec{x} \in I_1 \times I_2$ tal que $\Phi(\vec{x}) = \vec{x}$, ou seja, que existe um equilíbrio de Nash.

Com um *software* de otimização, podemos encontrar e calcular os equilíbrios de Nash dos jogos citados ao longo do trabalho em estratégias mistas.

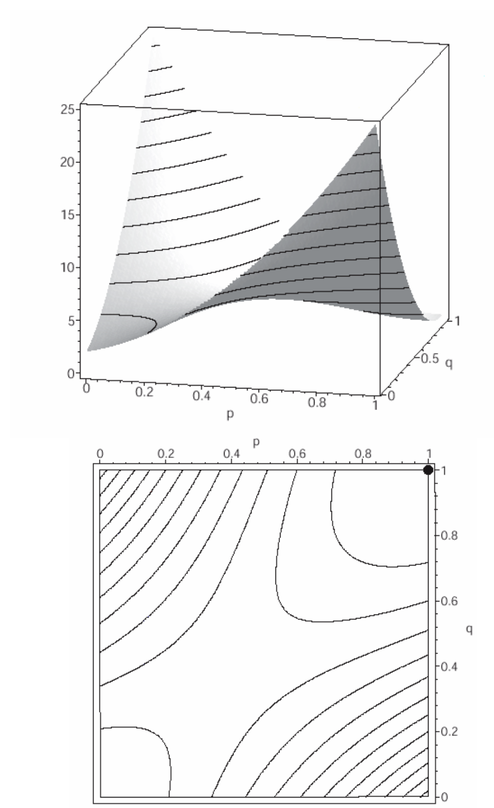

Figura 9: Representação gráfica do Dilema dos Prisioneiros

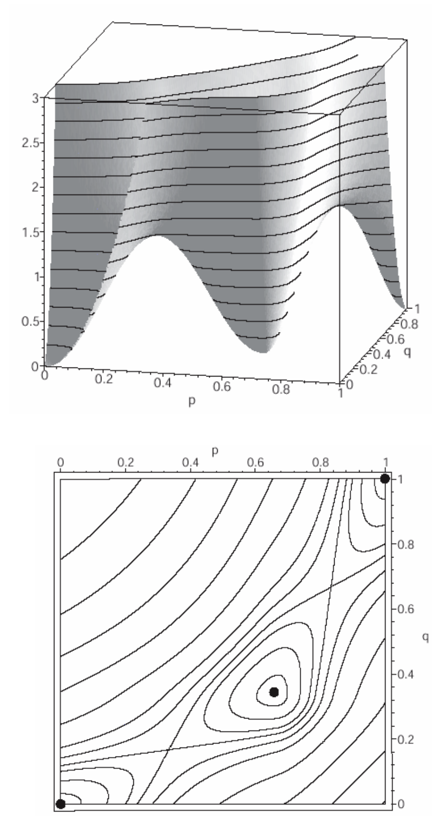

Figura 10: Representação gráfica da Guerra dos Sexos

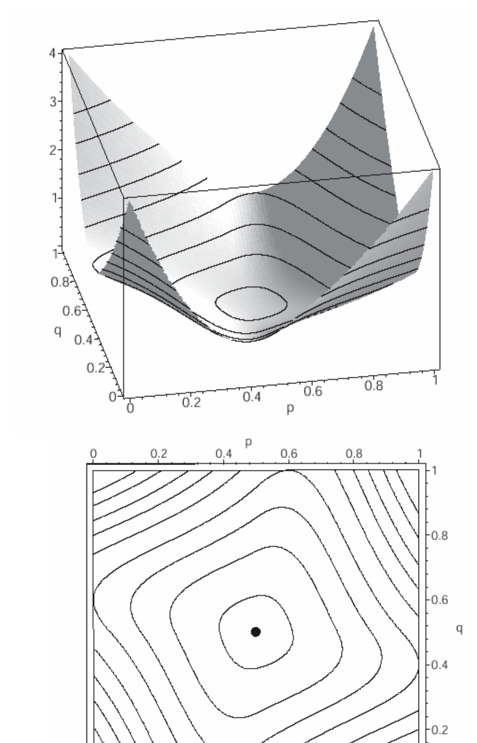

Figura 11: Representação gráfica do Combinando Moedas

Referências

[1] J. P. Torres-Martínez, "Jogos Sociais e Equilíbrio Walrasiano", notas de minicurso SEMAP/UFF online (http://www.semap.labma.ufrj.br/arquivos), 2006.

[2] H. J. Bortolossi, G. Garbugio, e B. A. Sartini, "Uma Introdução à Teoria dos Jogos", notas de minicurso SEMAP/UFF online (http://www.semap.labma.ufrj.br/arquivos), 2006.

[3] E. L. Lima, "Análise Real, Volume 1", Coleção Matemática Universitária/IMPA, 2004.

[4] M. Shubik, "Teoría de Juegos en las Ciencias Sociales – Conceptos y Soluciones", Textos de Economia do Fondo de Cultura Económica/Mexico, 1996.