

Superfícies e subvariedades lagrangeanas auto-similares

Orientador: Henri Anciaux

Aluno: Rafael Briquet

Departamento de Matemática PUC-Rio



PONTIFÍCIA
UNIVERSIDADE
CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO

Introdução

O fluxo de curvatura média é o fluxo gradiente do funcional de área no conjunto de n -subvariedades de uma variedade riemanniana. Do ponto de vista da análise, este fluxo é governado por uma equação parabólica não-linear. Resultados clássicos de análise mostram a existência local do fluxo, porém entender seu comportamento em grandes intervalos de tempo é um problema difícil.

Fluxos auto-similares surgem como soluções especiais do fluxo de curvatura média que preserva a forma da subvariedade ao longo da evolução. De forma analítica, isto significa estabelecer uma ansatz particular para a EDP descrevendo o fluxo, para assim eliminarmos a variável tempo e reduzirmos a equação parabólica para uma elíptica.

O mais simples (e mais importante) exemplo de fluxo auto-similar é quando a evolução da curva se dá por meio de uma homotetia. Uma subvariedade auto-similar X com vetor de curvatura média \vec{H} satisfaz o sistema elíptico não-linear

$$\vec{H} + \lambda X^\perp = 0,$$

onde X^\perp é a projeção do vetor posição X no espaço normal. Se λ é uma constante positiva não-nula, a subvariedade se contrai para um único ponto em tempo finito sob a ação do fluxo de curvatura média, tendo sua forma inalterada durante o processo. Se λ é uma constante negativa não-nula, a subvariedade irá expandir, novamente tendo sua forma inalterada – neste caso a subvariedade é necessariamente não-compacta. Se λ é nula, temos o caso das subvariedades mínimas, que são estacionárias sob a ação do fluxo.

O objetivo desse projeto é de encontrar exemplos de subvariedades lagrangeanas que são auto-similares. Nos baseamos sobre duas construções devidas a I. Castro e B.-Y. Chen (cf [CC]) e I. Castro e F. Urbano (cf [CU]).

Construção

Proposição 1 ([CC]) *Seja $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ uma curva legendriana parametrizada por comprimento de arco em \mathbb{S}^3 e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ uma curva legendriana parametrizada por comprimento de arco em \mathbb{H}_1^3 .*

A imersão

$$\begin{aligned} X : I_1 \times I_2 &\rightarrow \mathbb{C}^2 \\ (s, t) &\mapsto (\gamma_1(s)\alpha_1(t), \gamma_2(s)\alpha_2(t)), \end{aligned}$$

é conforme e lagrangiana, seu fator conforme é

$$e^{2u} = |\gamma_1|^2 + |\alpha_1|^2$$

e seu vetor de curvatura média é

$$\vec{H} = e^{-2u}(k_\gamma JX_s + k_\alpha JX_t),$$

onde k_γ e k_α são as funções de curvatura de γ e α respectivamente.

Lema 2 *Uma superfície de Castro-Chen é uma superfície auto-similar se e somente se verifica as seguintes equações:*

$$k_\gamma + \lambda \langle \gamma'_1, i\gamma_1 \rangle = 0$$

$$k_\alpha - \lambda \langle \alpha'_1, i\alpha_1 \rangle = 0$$

Demonstração.

Uma base do espaço normal é dado por $(N_s, N_t) := (JX_s, JX_t)$. Da Proposição 1, temos que $\langle \vec{H}, N_s \rangle = k_\gamma$ e $\langle \vec{H}, N_t \rangle = k_\alpha$. Por outro lado, calculamos

$$\begin{aligned} \langle X, N_s \rangle &= \langle \gamma_1 \alpha_1, i\gamma'_1 \alpha_1 \rangle + \langle \gamma_2 \alpha_2, i\gamma'_2 \alpha_2 \rangle = |\alpha_1|^2 \langle \gamma_1, i\gamma'_1 \rangle + |\alpha_2|^2 \langle \gamma_2, i\gamma'_2 \rangle \\ &= (|\alpha_1|^2 - |\alpha_2|^2) \langle \gamma_1, i\gamma'_1 \rangle = -\langle \gamma_1, i\gamma'_1 \rangle = \langle \gamma'_1, i\gamma_1 \rangle. \end{aligned}$$

Então projetando a equação $\vec{H} + \lambda X^\perp = 0$ em N_s nós temos

$$k_\gamma + \lambda \langle \gamma'_1, i\gamma_1 \rangle = 0.$$

Da mesma forma calculamos

$$\begin{aligned} \langle X, N_t \rangle &= \langle \gamma_1 \alpha_1, i\gamma_1 \alpha'_1 \rangle + \langle \gamma_2 \alpha_2, i\gamma_2 \alpha'_2 \rangle = |\gamma_1|^2 \langle \alpha_1, i\alpha'_1 \rangle + |\gamma_2|^2 \langle \alpha_2, i\alpha'_2 \rangle \\ &= (|\gamma_1|^2 + |\gamma_2|^2) \langle \alpha_1, i\alpha'_1 \rangle = -\langle \alpha'_1, i\alpha_1 \rangle. \end{aligned}$$

Projetando a equação em N_t chegamos à segunda equação do lema 2.

A próxima construção é de Castro e Urbano.

Proposição 3 ([CU]) *Seja $Y(z) = (Y_1(z), Y_2(z))$ uma imersão lagrangiana de uma superfície Σ em \mathbb{C}^2 e ψ_1 e ψ_2 duas imersões lagrangianas mínimas de \mathcal{M}_1 em \mathbb{S}^{2p+1} e de \mathcal{M}_2 em \mathbb{S}^{2q+1} . Então a seguinte imersão é lagrangiana*

$$\begin{aligned} X : \Sigma \times \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 &\rightarrow \mathbb{C}^{n+1} \\ (z, x, y) &\mapsto (Y_1(z)\psi_1(x), Y_2(z)\psi_2(y)), \end{aligned}$$

e seu ângulo lagrangiano é dado por

$$\beta_X = \beta_Y + p \arg Y_1 + q \arg Y_2.$$

Lema 4 *Assuma que a imersão lagrangiana $Y(z)$ é uma imersão de Castro-Chen $Y(s, t) = (\gamma_1(s)\alpha_1(t), \gamma_2(s)\alpha_2(t))$. Então sua curvatura média é dada por*

$$\vec{H} = e^{-2u} \left(\left(k_\gamma + \langle \gamma'_1, i\gamma_1 \rangle \left(\frac{p}{|\gamma_1|^2} - \frac{q}{|\gamma_2|^2} \right) \right) N_s + \left(k_\alpha + \langle \alpha'_1, i\alpha_1 \rangle \left(\frac{p}{|\alpha_1|^2} + \frac{q}{|\alpha_2|^2} \right) \right) N_t \right),$$

onde N_s e N_t são dois vetores normais dados por

$$N_s = J(\gamma'_1 \alpha_1 \psi_1, \gamma'_2 \alpha_2 \psi_2)$$

$$N_t = J(\gamma_1 \alpha'_1 \psi_1, \gamma_2 \alpha'_2 \psi_2)$$

Consequentemente, a imersão X é auto-similar se e somente se as duas equações abaixo são verificadas

$$\begin{aligned} k_\gamma + \langle \gamma'_1, i\gamma_1 \rangle \left(\lambda + \frac{p}{|\gamma_1|^2} - \frac{q}{|\gamma_2|^2} \right) &= 0 \\ k_\alpha + \langle \alpha'_1, i\alpha_1 \rangle \left(-\lambda + \frac{p}{|\alpha_1|^2} + \frac{q}{|\alpha_2|^2} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Demonstração.

Aplicando a fórmula para o ângulo lagrangiano de [CU] para o caso especial da superfície de Castro-Chen nós temos

$$\beta_X = \beta_\gamma + p \arg \gamma_1 + q \arg \gamma_2 + \beta_\alpha + p \arg \alpha_1 + q \arg \alpha_2$$

daí

$$\langle \vec{H}, N_s \rangle = k_\gamma + p \frac{\langle \gamma'_1, i\gamma_1 \rangle}{|\gamma_1|^2} - q \frac{\langle \gamma'_1, i\gamma_1 \rangle}{|\gamma_2|^2}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle X, N_s \rangle &= \langle \gamma_1 \alpha_1 \psi_1, J\gamma'_1 \alpha_1 \psi_1 \rangle + \langle \gamma_2 \alpha_2 \psi_2, J\gamma'_2 \alpha_2 \psi_2 \rangle = |\alpha_1|^2 |\psi_1|^2 \langle \gamma_1, i\gamma'_1 \rangle + |\alpha_2|^2 |\psi_2|^2 \langle \gamma_2, i\gamma'_2 \rangle \\ &= (|\alpha_1|^2 - |\alpha_2|^2) \langle \gamma_1, i\gamma'_1 \rangle = -\langle \gamma_1, i\gamma'_1 \rangle = \langle \gamma'_1, i\gamma_1 \rangle. \end{aligned}$$

Então projetando a equação auto-similar $\vec{H} + \lambda X^\perp = 0$ sobre N_s nos dá a primeira equação do lema 4.

De forma similar, $\langle X, N_t \rangle = -\langle \alpha'_1, i\alpha_1 \rangle$. Projetando a equação auto-similar sobre N_t resulta na segunda equação do Lema 4.

Seja n um vetor normal à imersão ψ_1 . Então $N := (\gamma_1 \alpha_1 n, 0)$ é normal à X . É imediato verificar que $\langle N, X \rangle = 0$ e $\langle \vec{H}, N \rangle = 0$, o que completa a demonstração.

Estudo da curva esférica

Seja $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ uma curva legendriana e $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{S}^2(1/2) \simeq \mathbb{C}P^1$ a imagem de γ pela projeção de Hopf, isto é, $\xi_1 + i\xi_2 = 2\gamma_1\bar{\gamma}_2$ e $\xi_3 = |\gamma_1|^2 - |\gamma_2|^2$.

Vamos usar as coordenadas esféricas de \mathbb{S}^2 : $2\xi(s) = (\sin \phi(s)e^{i\theta(s)}, \cos \phi(s))$, onde $e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1$ and $\phi \in (0, \pi)$. Então $2\xi'(s) = ((\phi' \cos \phi + i\theta' \sin \phi)e^{i\theta}, -\phi' \sin \phi)$. Consideramos o triedro ortonormal (e_1, e_2, e_3) com $e_1 = \xi$, $e_2 = (\cos \phi e^{i\theta}, -\sin \phi)$ e $e_3 = (ie^{i\theta}, 0)$, logo $\xi'(s) = \phi' e_2 + \theta' \sin \phi e_3$. Como $\xi(s)$ é parametrizado por comprimento de arco, existe uma função α tal que $2 \cos \alpha = \phi'$ and $2 \sin \alpha = \theta' \sin \phi$.

Então calculamos

$$\xi'' = \alpha'(-\sin \alpha e_2 + \cos \alpha e_3) + \cos \alpha e_2' + \sin \alpha e_3'.$$

Por outro lado, $e_3' = -\theta'(e^{i\theta}, 0)$ logo $\langle e_2', e_3 \rangle = -\langle e_3', e_2 \rangle = \theta' \cos \phi$. Segue que a curvatura de ξ em $\mathbb{S}^2(1/2)$ é dada por

$$(1) \quad k_\xi = \langle n, \xi'' \rangle = \alpha' + \theta' \cos \phi.$$

Reciprocamente, seja $c(s) = (\alpha(s), \phi(s))$ uma curva fechada no cilindro $\mathbb{S}^1 \times (0, \pi)$. Isto define localmente uma curva esférica de velocidade unitária $2\xi(s) = (\sin \phi(s)e^{i\theta(s)}, \cos \phi(s))$, onde θ é definido por $\theta' = 2 \frac{\sin \alpha}{\sin \phi}$. Observamos que θ está definido a menos de uma constante aditiva; mudar o valor da constante produz uma rotação em torno do eixo vertical de $\mathbb{S}^2(1/2)$.

É evidente que ξ é fechada se e só se $\Theta(c) := 2 \int_c \frac{\sin \alpha}{\sin \phi} \in 2\pi\mathbb{Q}$. Agora consideramos o levantamento legendriano γ de ξ . Seu ângulo legendriano β está definido localmente por $\beta'(s) = k_\xi = \alpha' + \theta' \cos \phi$ e está definido também a menos de uma constante aditiva. Então quando a curva legendriana γ é fechada? É claro que uma condição necessária é que ξ seja fechada, mas isso não é suficiente. Seja $\xi : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^2$ a parametrização de uma curva esférica fechada tal que $\xi(a) = \xi(b)$, então $\gamma(b) = e^{iB}\gamma(a)$, onde $B = \int_a^b \beta'(s) ds$. Então se B é múltiplo de 2π , a curva γ é fechada. Se B pertence a $2\pi\mathbb{Q}$, então "levantando diversas vezes" a curva ξ , obtemos uma curva legendriana fechada γ .

Resumindo, seja $c = (\alpha(s), \phi(s))$ uma curva fechada em $\mathbb{S}^1 \times (0, \pi)$. Então a curva legendriana correspondente em \mathbb{S}^3 é fechada se e só se $\Theta(c) := 2 \int_c \frac{\sin \alpha}{\sin \phi}$ e $\Psi(c) := \int_c 2 \sin \alpha \cot \phi$ pertencem a $2\pi\mathbb{Q}$.

Agora, seja $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{S}^2 \simeq \mathbb{C}P^1$ a imagem de γ pela projeção de Hopf. Segue que a equação (1) é equivalente a

$$(2) \quad k_\xi + (\xi \times \xi')_3 \left(\lambda + \frac{2p}{1+2\xi_3} - \frac{2q}{1-2\xi_3} \right) = 0.$$

Para resolver a equação (2) utilizaremos as coordenadas esféricas em \mathbb{S}^2 : $2\xi(s) = (\sin \phi(s)e^{i\theta(s)}, \cos \phi(s))$, onde $e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1$ e $\phi \in (0, \pi)$.

Observamos que $1 + 2\xi_3 = 1 + \cos \phi$ e $(\xi \times \xi')_3 = \frac{1}{2} \sin \alpha \sin \phi$ então deduzimos que a equação (2) é equivalente ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} \alpha' + \theta' \cos \phi + \sin \alpha \sin \phi \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{p}{1+\cos \phi} - \frac{q}{1-\cos \phi} \right) = 0 \\ \theta' = 2 \frac{\sin \alpha}{\sin \phi} \\ \phi' = 2 \cos \alpha \end{cases}$$

Eliminando a variável θ , ficamos com

$$(3) \quad \begin{cases} \alpha' = \sin \alpha \left(\frac{(q-p)+(p+q-2)\cos \phi}{\sin \phi} - \lambda \frac{\sin \phi}{2} \right) \\ \phi' = 2 \cos \alpha \end{cases}$$

Este sistema admite uma integral primeira:

$$\begin{aligned} E(\alpha, \phi) &= \sin \alpha \sin \phi (1 + \cos \phi)^{-p/2} (1 - \cos \phi)^{-q/2} \exp(-\lambda \cos \phi/4) \\ &= \sin \alpha 2 \cos(\phi/2) \sin(\phi/2) (2 \cos^2(\phi/2))^{-p/2} (2 \sin^2(\phi/2))^{-q/2} \exp(-\lambda \cos \phi/4) \\ &= 2^{1-(p+q)/2} \cos^{1-p}(\phi/2) \sin^{1-q}(\phi/2) \exp(-\lambda \cos \phi/4). \end{aligned}$$

Conclusão

Deduzimos do teorema de Cauchy-Lipschitz a existência de curvas soluções ao sistema (3). Dáí decorre a existência de uma família de subvariedades lagrangeanas auto-similares em \mathbb{C}^n .

Referências

- [AbLa] U. Abresch, J. Langer: *The normalized curve shortening flow and homothetic solutions*, J. of Diff. Geom. **23** (1986), 175–196
- [An] H. Anciaux: *Construction of equivariant self-similar solutions to the mean curvature flow in \mathbb{C}^n* , Geom. Dedicata, **120** (2006), no. 1, 37–48
- [AR] H. Anciaux, P. Romon: *Cyclic and ruled Lagrangian surfaces in complex Euclidean space* math.DG/0703645
- [CC] I. Castro, B.-Y. Chen: *Lagrangian surfaces in complex Euclidean plane via spherical and hyperbolic curves*, Tohoku Math. J. **58**(2006), no. 4
- [CU] I. Castro, F. Urbano: *On a new construction of special Lagrangian immersions in complex Euclidean space*, to appear in Quart. Math. J. (Oxford)
- [Ku] W. Kühnel: **Differential geometry**. American Mathematical Society, 2005.