

RELATÓRIO FINAL PIBIC

**INSTABILIDADE DE SAFFMAN-TAYLOR NO
DESLOCAMENTO DE LÍQUIDOS
VISCOPLÁSTICOS**

Alunos: Priscilla Ribeiro Vargas, Rafael Leal

Orientador: Paulo Roberto de Souza Mendes

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA - RJ

Resumo

Em poços surgentes, o segundo estágio de recuperação consiste na injeção de água ou gás para extrair o petróleo das rochas porosas. Esses fluidos injetados tendem a percorrer as regiões mais permeáveis, deixando quantidades substanciais de óleo nas formações rochosas. O estudo da interface entre o fluido injetor e o deslocado é de extrema importância, uma vez que a produção de petróleo no primeiro estágio, obtida apenas pela pressão natural do reservatório, é limitada. A eficiência do deslocamento dos fluidos pode ser então avaliada pela forma da interface entre eles. Perfis mais ramificados sugerem o atravessamento indesejável do fluido deslocador através do deslocante, o que indica uma baixa recuperação. Este trabalho teve como objetivo simular experimentalmente a recuperação secundária de petróleo em uma célula de Hele-Shaw a partir do deslocamento de um fluido não newtoniano por um newtoniano. O fluido deslocante utilizado foi um óleo mineral e o deslocador foi o Carbopol em duas diferentes concentrações. Com uma câmara digital foram filmadas as interfaces entre os fluidos durante o escoamento. A investigação da forma da interface permitiu comparar a eficiência de recuperação entre as razões de viscosidade $\frac{\eta_{\text{óleo}}}{\eta(\dot{\gamma}_1)} = 42,75\%$ e $\frac{\eta_{\text{óleo}}}{\eta(\dot{\gamma}_1)} = 21,37\%$ com a variação da velocidade do escoamento. Comparando os resultados obtidos conclui-se que a eficiência de recuperação do fluido não newtoniano foi maior para o caso com menor razão de viscosidades.

Palavras-chave:

Recuperação secundária, *Viscous fingering*, Célula de Hele-Shaw, Reologia.

Abstract

In surging oil wells, the second recovery stage is the injection of water or gas to extract oil of porous rocks. These fluids injected tend to flow in to more permeable regions, leaving substantial amounts of oil in rock formations. The study of the interface between two adjacent fluids is extremely important, because the production of oil in the primary stage, obtained by the natural pressure of the reservoir, is limited. The efficiency of the displacement of fluids can be evaluated by the shape of the interface between them. Injected fluids tends to flow to the more permeable layers or zones and bypassing a large amount of the oil in the unswept region. This will create early breakthrough of the injected fluid and the increasing production of the injected fluid in the production well makes the process, eventually, uneconomical. Viscous fingering in non-Newtonian fluids in rectangular Hele-Shaw cell was investigated. The cell was filled with Carbopol in two different concentrations. Mineral oil was injected in to the cell and the displacement was observed. A digital camera was used to capture images of the interfaces between the fluids during the flow. The interface shape allowed the comparison of recovery efficiency between $\frac{\eta_{oleo}}{\eta(\dot{\gamma}_1)} = 42,75\%$ and $\frac{\eta_{oleo}}{\eta(\dot{\gamma}_1)} = 21,37\%$ for different speeds. Comparing the results, is concluded that the lower ratio of viscosity had a better efficiency of recovering than the case with the upper ratio of viscosity.

Keywords:

Second recovery stage, *Viscous fingering*, Hele-Shaw cell, Rheology.

Índice

1. Introdução	8
1.1 Motivação	9
1.2 Objetivo	11
2. Revisão bibliográfica.....	12
Descrição do projeto.....	18
3. Procedimento experimental.....	22
3.1 Célula de Hele-Shaw	22
3.2 Reologia	24
4. Discussão e Resultados.....	26
4.1 Reologia	26
4.1.1 Óleo Mineral	26
4.1.2 Carbopol 0.15%.....	29
4.1.3 Carbopol 0.09%.....	32
4.1.4 Adimensionalização	35
4.2 $\frac{\eta_{\text{óleo}}}{\eta(\dot{\gamma}_1)} = 42,75\%$	35
4.3 $\frac{\eta_{\text{óleo}}}{\eta(\dot{\gamma}_1)} = 21,37\%$	37
4.4 Análise dos testes com diferentes razões de viscosidades.....	39
5. Considerações finais.....	40
Referências bibliográficas	42
Anexo I.....	45

Lista de figuras

Figura 1.1: Evolução temporal do preço do petróleo.....	10
Figura 2.1: Gráfico de viscosidade em função da tensão de cisalhamento.....	17
Figura 3.1: Projeto esquemático da bancada experimental.....	18
Figura 3.2: Vista 3D e transversal da célula de Hele-Shaw.....	19
Figura 3.3: Vista explodida das células.....	20
Figura 3.4: Células e guilhotinas.....	21
Figura 4.1: Célula preenchida com Carbopol preparada para o início do teste.....	22
Figura 4.2: Nivelamento para início de teste.....	23
Figura 4.3: Bancada experimental.....	24
Figura 5.1: Tensão em função da taxa de deformação do óleo.....	27
Figura 5.3: Visualização do escoamento para $\frac{\eta_{\text{óleo}}}{\eta(\dot{\gamma}_1)} = 42,75\%$ com velocidade V1.	37
Figura 5.4: Visualização do escoamento para $\frac{\eta_{\text{óleo}}}{\eta(\dot{\gamma}_1)} = 42,75\%$ com velocidade V2.	37
Figura 5.5: Visualização do escoamento para $\frac{\eta_{\text{óleo}}}{\eta(\dot{\gamma}_1)} = 21,37\%$ com velocidade V1.	38
Figura 5.6: Visualização do escoamento para $\frac{\eta_{\text{óleo}}}{\eta(\dot{\gamma}_1)} = 21,37\%$ com velocidade V2.	39

Lista de símbolos

$\dot{\gamma}$ - Taxa de deformação [s^{-1}]

\underline{D} - Tensor

F_x - Força de corpo na direção x [N]

F_y - Força de corpo na direção y [N]

g - Aceleração da gravidade [m/s^2]

G' - Módulo de armazenamento [Pa]

G'' - Módulo de dissipação [Pa]

h - Metade da distância de folga entre as células [mm]

k - Índice de consistência [$Pa \cdot s^n$]

η - Viscosidade dinâmica não newtoniana [Pa.s]

η_0 - Viscosidade em baixas taxas de deformação [Pa.s]

η_∞ - Viscosidade em altas taxas de deformação [Pa.s]

$\frac{\eta_{\text{óleo}}}{\eta(\dot{\gamma}_1)}$ - Razão de viscosidade em relação ao óleo e ao Carbopol []

n - Índice *power-law* []

p - Pressão [Pa]

ρ - Densidade [Kg/m^3]

S - Fluidez [$m^3/Pa \cdot s$]

t - Tempo [s]

\underline{T} - Tensor das tensões []

τ - Tensão [Pa]

τ_0 - Tensão limite de escoamento [Pa]

u - Velocidade na direção x [m/s]

\bar{u} - Velocidade média na direção x [m/s]

v - Velocidade na direção y [m/s]

\bar{v} - Velocidade média na direção y [m/s]

\vec{V} - Vetor velocidade [m/s]

1. Introdução

O crescimento do consumo de petróleo no início do século XX pode ser relacionado à difusão de motores à combustão, assim como a necessidade de fonte de energia para usinas termoelétricas e matéria-prima para muitas indústrias químicas. Atualmente, o petróleo corresponde a mais de 60% da energia primária consumida no mundo, além de ser matéria-prima para diversos produtos como combustíveis, lubrificantes, insumos para a petroquímica, asfalto, remédios, plásticos e alimentos [1,2].

Combustível fóssil não-renovável e de origem orgânica, o petróleo é um recurso energético que constitui um dos principais suportes para o desenvolvimento econômico mundial. Assim, deve-se investir em exploração de poços em águas profundas, ultra-profundas e ambientes inóspitos como o continente antártico, a fim de aumentar as reservas para que a demanda possa ser atendida. O petróleo obtido de novas descobertas tenderá a ficar cada vez mais escasso e de difícil acesso, valorizando aquele já existente [3].

Em poços surgentes, a produção de petróleo no primeiro estágio é obtida por causa da pressão natural do reservatório. A quantidade de óleo produzida pela energia do reservatório é conhecida como recuperação primária. A eficiência da recuperação de óleo nesse primeiro estágio depende da natureza do reservatório e é limitada a, no máximo, 30% do volume total de petróleo disponível [4-6]. Assim, mais de 70% do óleo restante no reservatório poderão ser removidos por técnicas de recuperação secundárias e terciárias.

O segundo estágio de recuperação consiste na injeção de água ou gás para extrair o petróleo das rochas porosas [7]. Esses fluidos injetados tendem a percorrer as regiões mais permeáveis, deixando quantidades substanciais de óleo nas formações rochosas [5-6]. Esses métodos de recuperação, que envolvem tecnologias conhecidas, também são chamados de métodos convencionais de recuperação.

Os métodos de recuperação terciária abrangem tecnologias que ainda não são totalmente dominadas e são empregados para atuar onde o processo convencional falhou ou poderia falhar caso fosse empregado.

Os principais métodos da recuperação terciária são os métodos térmicos, miscíveis e químicos. O método térmico é normalmente utilizado para reservatórios que contém óleo com baixíssimo grau API o que dificulta a movimentação do fluido. Esse método consiste na injeção de água quente ou vapor d'água com o objetivo de diminuir a viscosidade do óleo, aumentando a sua mobilidade. Já o método miscível é aplicado quando há alta tensão interfacial. Essa tensão pode ser diminuída através da injeção de fluidos que, ao serem misturados com o óleo do reservatório, permitem o seu deslocamento. Por último, o método químico utiliza polímeros dissolvidos em água, microemulsões ou fluidos alcalinos que difundem-se no meio poroso aumentando a eficiência do varrido.

1.1 Motivação

O mundo viveu, nos últimos trinta anos do século passado, dois choques no preço do petróleo. O primeiro ocorreu em 1973 quando os árabes se deram conta de que o petróleo é um bem não-renovável. Devido à Guerra do Yom Kippur, os produtores árabes resolveram suspender as exportações aos EUA e Europa como punição pelo apoio do Ocidente a Israel naquela guerra. O segundo choque do petróleo, em 1979, foi resultado de uma ação liderada pela Arábia Saudita visando elevar o preço alvo do petróleo. Além disso, houve o agravamento da conjuntura internacional pela ocorrência concomitante da revolução fundamentalista no Irã naquele ano.

O preço do barril de petróleo, expresso em dólar de 2003, atingiu US\$ 42 em 1973 e chegou a US\$ 80 em 1979. Em Outubro de 2004 o petróleo atingira 48 US\$/barril, retomando

níveis próximos aos do primeiro choque. A Figura 1.1 ilustra o histórico da evolução do preço do petróleo [8].

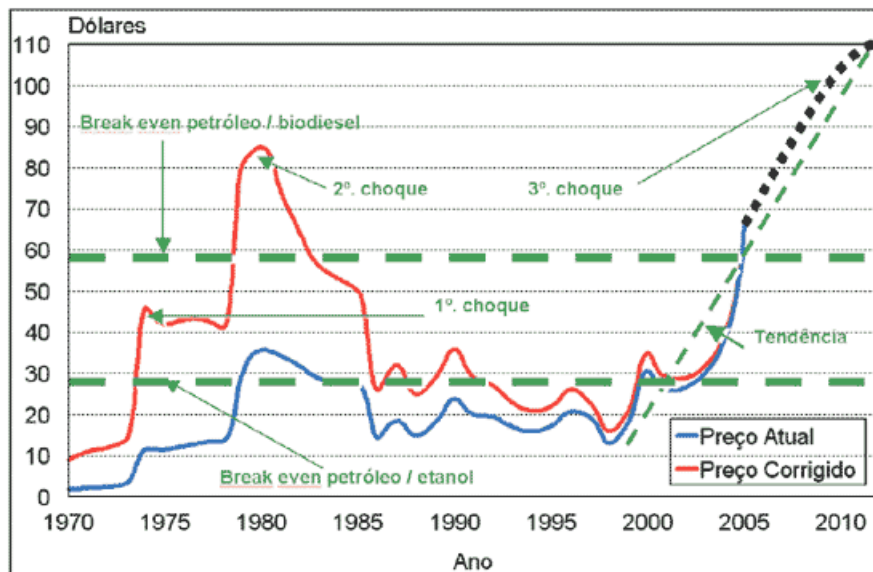


Figura 1.1: Evolução temporal do preço do petróleo

Na década de 70, por causa dos bruscos aumentos do preço do petróleo, os métodos de recuperação foram muito estudados, buscando o aumento da eficiência de recuperação. Estes esforços foram norteados pela pouca disponibilidade de petróleo no mercado. No mar do Norte, por exemplo, lençóis petrolíferos sob águas profundas considerados economicamente inviáveis no período anterior, passaram a ser ativamente explorados.

Novamente estamos assistindo a uma escalada nos preços de petróleo, o que certamente induz uma nova onda de esforços de pesquisa visando a desenvolver tecnologias para o aumento da taxa de recuperação.

1.2 Objetivo

Com o objetivo de deslocar o petróleo residente no reservatório para os poços produtores através de injeção de água em um poço injetor, o projeto visa simular a recuperação secundária de óleo.

Foi construída uma bancada experimental para realizar a simulação do deslocamento de um fluido não newtoniano por um newtoniano em um meio poroso. Os fluidos não newtonianos utilizados foram soluções aquosas de carbopol, a duas concentrações, 0.09% e 0.15%. O fluido newtoniano (deslocador) utilizado foi o óleo Teresso 46.

Utilizando uma câmera filmadora observamos a evolução da forma da interface em função dos parâmetros do problema. O parâmetro dinâmico de interesse é a vazão de injeção do fluido newtoniano deslocador, e os parâmetros reológicos são a razão de viscosidades, expoente *power law*, tensão limite de escoamento e o índice de consistência.

2. Revisão bibliográfica

Em 1898, o arquiteto Henry Selby Hele-Shaw projetou uma célula com o objetivo de estudar o escoamento potencial em torno de objetos utilizando água e explorando o fato de que a equação que rege o escoamento entre placas tem a mesma forma da equação de Euler. A célula consistia em duas placas planas separadas por 1 mm de distância e 30 cm de largura.

Posteriormente, a célula de Hele-Shaw foi utilizada para estudar escoamentos em meios porosos, pois logo se observou que a lei de Darcy também tem a mesma forma da equação que rege o escoamento entre placas.

Em seguida, com a célula de Hele-Shaw estudaram-se experimentos de escoamentos em meios porosos onde um fluido é deslocado por um segundo. Nesses experimentos, o volume entre as placas é preenchido com um fluido e posteriormente outro fluido é injetado através da entrada da célula. Esse dispositivo é utilizado para escoamentos bidimensionais e é ideal para a análise relativa da instabilidade de Saffman-Taylor [9].

A instabilidade de Staffman-Taylor ou *Viscous fingering* é um fenômeno observado quando um fluido de baixa viscosidade substitui um de maior viscosidade na célula de Hele-Shaw. A interface entre os dois fluidos cresce, como uma interpenetração, com formato similar à dedos.

O *Viscous fingering* tem sido estudado em diversas áreas, como física, química e engenharia devido à sua importância em processos industriais. São exemplo o processamento de polímeros, injeção de gás e a recuperação de óleo.

Uma experiência tradicional é realizada com dois fluidos newtonianos imiscíveis, como ar e glicerina, com uma razão de viscosidade elevada. Quando o fluido de menor viscosidade é injetado na célula já preenchida com o outro, a interface permanece estável. Para a situação inversa, a interface é instável e há formação de *viscous fingering* [9].

Diversos trabalhos foram publicados por Yamamoto [10-14] referentes ao estudo da formação de *viscous fingering* em células retangulares de Hele-Shaw.

Yamamoto et al. [10] estudaram o efeito da viscosidade nos fluidos pseudoplásticos em relação aos padrões de formação e de crescimento de *viscous fingering* na célula de Hele-Shaw. Ar foi injetado sobre fluidos não newtonianos, como carboxymethylcellulose (CMC) e polyacrylamide (PAA), e sobre a glicerina que representa um fluido newtoniano. Observou-se que os *fingers* da glicerina possuem estruturas densas, enquanto os dos fluidos não newtonianos formam estruturas ramificadas. Os autores explicam esse fenômeno através do “efeito de proteção” nos fluidos pseudoplásticos. O número de ramificações aumenta com o acréscimo da pressão do ar injetado. Para elevadas pressões sobre o PAA não foi encontrado um padrão de crescimento dos *viscous fingering* ao contrário do que foi visto no CMC. Yamamoto et al. acreditam que a mudança nos padrões de crescimento dos *viscous fingering* está relacionada às propriedades elongacionais dos fluidos testados.

Yamamoto et al. [11] caracterizaram a velocidade da ponta dos *fingers* pelo gradiente de pressão através da Lei de Darcy modificada utilizando o mesmo procedimento experimental para fluidos CMC [10]. Constatou-se que a velocidade da ponta dos *fingers* geralmente aumenta com o acréscimo do gradiente de pressão, enquanto o crescimento dos *fingers* pode ser retardado, em alguns momentos, em função do acréscimo de ramificações que diminuem ou mantêm constante a velocidade do *finger*. Segundo a Lei de Darcy modificada, o gradiente efetivo de pressão perto da ponta da ponta do *finger* é maior do que a média do gradiente de pressão entre a ponta do *finger* e a saída da célula e observou-se que a taxa de crescimento depende da altura entre as placas paralelas.

Simulações numéricas foram feitas para validar esses experimentos [12]. O método usado foi uma combinação de elementos finitos com VOF (*volume of fluid*) e o modelo de viscosidade não newtoniano utilizado foi o modelo de Carreau. A relação entre a viscosidade dos fluidos

pseudoplásticos e o crescimento dos *viscous fingering* foi analisada. Os resultados indicam que a direção do vetor velocidade fornece a direção de propagação da interface. Quando o *finger* se ramifica, há quebra da estabilidade e há divisão da sua ponta. Após essa divisão, a velocidade entre os dois *fingers* resultantes decresce e a interface dessa região pára de crescer. Por outro lado, a velocidade perto dos dois *fingers* é alta, com isso o *finger* avança.

Outro estudo, experimental e numérico, foi feito por Yamamoto et al. [13] onde verificou-se o movimento de *viscous fingering* para soluções surfactantes em células retangulares de Hele-Shaw.

Chevalier et al. [15] afirmam que para a instabilidade de Saffman-Taylor, a inércia do fluido pode ser importante para altas velocidades dos *fingers*. Foi utilizada uma célula de Hele-Shaw preenchida com óleo silicone e o ar comprimido foi usado como fluido menos viscoso para direcionar o escoamento. A análise experimental mostra que os efeitos inerciais são importantes para fluidos com baixa viscosidade e para grandes espaçamentos entre as placas paralelas. Para regimes onde os efeitos viscosos são importantes, com o aumento da velocidade a espessura do *finger* aumenta.

Para regimes abaixo do número modificado de Weber crítico, a espessura do *finger* é dada pelo balanço entre forças capilares, que tendem a alargar o *finger*, e forças viscosas, que tendem a achatar o *finger*. Com o aumento da velocidade, as forças viscosas dominam e é observado um achatamento dos *fingers*. Para regimes acima do número modificado de Weber crítico, é observado um aumento da espessura do *finger* com o aumento da velocidade. Para este caso, a espessura do *finger* é determinada pelo número de Reynolds modificado e pelo balanço entre forças viscosas e inerciais. Com o aumento da velocidade, a inércia domina o escoamento e conseqüentemente há um alargamento dos *fingers*.

Amar et al. [16] fizeram um estudo teórico com enfoque na instabilidade de Saffman-Taylor e considerando o comportamento de um fluido newtoniano deslocando um fluido não

newtoniano em uma célula de Hele-Shaw. O problema foi modelado em duas dimensões e uma transformação hodográfica foi feita, onde uma aproximação controlada é possível. Concluiu-se que para fluidos pseudoplásticos a largura do *finger* tendeu a zero para pequenos valores da tensão superficial. Como o modelo é bidimensional isso é válido enquanto a largura do *finger* é maior que a distância entre as placas paralelas.

Linder et al. [17] também fizeram um estudo sobre a instabilidade de Saffman-Taylor com aplicação da Lei de Darcy para células de Hele-Shaw, entretanto o experimento foi realizado com uma solução polimérica, com características de viscosidade pseudoplásticas, sendo deslocado por ar. Foi medida a espessura do *finger* em função da velocidade para soluções com diferentes concentrações. Para fluidos newtonianos a espessura do *finger* tende a diminuir com o aumento da velocidade. Além disso, a espessura limite do *finger* para altas velocidades tende a decrescer com o aumento da concentração do polímero.

Assim, para fluidos ligeiramente pseudoplásticos, a substituição da constante de viscosidade encontrada na Lei de Darcy pela viscosidade pseudoplástica fornece bons resultados experimentais. Para fluidos fortemente pseudoplásticos, a Lei de Darcy não é mais válida. Com análises experimentais, pode ser obtida a Lei de Darcy para fluidos pseudoplásticos derivados do modelo Power Law.

Outro estudo apresentado por Lindner [18] refere-se à instabilidade de um gel polímero e de uma espuma. O experimento foi realizado na célula retangular de Hele-Shaw com espaçamentos entre as placas variando entre 0.125 a 1 mm.

Para o gel, foram observadas estruturas ramificadas para baixas velocidades ($U < 0,05$ cm/s) e para velocidades altas, apenas um *finger* estável é observado e sua largura decresce com o aumento da velocidade. Ao contrário do que é observado para fluidos newtonianos, para baixas velocidades a largura do *finger* não depende nem da velocidade de propagação nem da largura do canal. Entretanto, a largura do *finger* aumenta com o aumento do espaçamento entre placas.

Para espuma, diferentes resultados foram obtidos. Para velocidades bem baixas, a espessura do *finger* decresce com o aumento da velocidade, o que indica a existência de um regime dominado pela tensão limite de escoamento.

Assim, a instabilidade Saffman-Taylor é drasticamente modificada para fluidos viscoplásticos, que apresentam *fingers* ramificados para baixas velocidades. Para velocidades altas, apenas um *finger* estável é observado. Os resultados para a espuma indicam que o fenômeno de deslizamento influencia a instabilidade.

Foi feito um estudo teórico [19] com fluidos não newtonianos para escoamento em células retangular e radial. Nesse estudo, a Lei de Darcy para fluidos não newtonianos foi estabelecida de forma detalhada.

Estudos relacionados à formação e propagação de bolhas em células retangulares de Hele-Shaw [20-23] e em células radiais [24] preenchidas com fluidos não newtonianos foram executados.

A teoria do escoamento laminar e lento através de um meio poroso homogêneo é baseada num experimento clássico originalmente desenvolvido por Darcy em 1856. A Lei de Darcy fornece a relação entre a velocidade e o gradiente de pressão. Para adaptar a Lei de Darcy aos fluidos não newtonianos, a viscosidade μ deve ser substituída pela função de viscosidade $\eta(\dot{\gamma})$.

Uma função de viscosidade para fluidos não newtonianos foi proposta por Souza Mendes e Dutra (SMD) [25]. A função é contínua e prevê o patamar newtoniano para baixas taxas de cisalhamento, como observado experimentalmente. Em seguida, há uma queda do valor da viscosidade associada à tensão limite de escoamento, e posteriormente há a região *power law*. Como pode ser visto na Figura 2.1, a equação apresenta derivadas contínuas, o que é adequado para simulações numéricas sem necessidade de regularização. Também é indicada para *curve-fittings*.

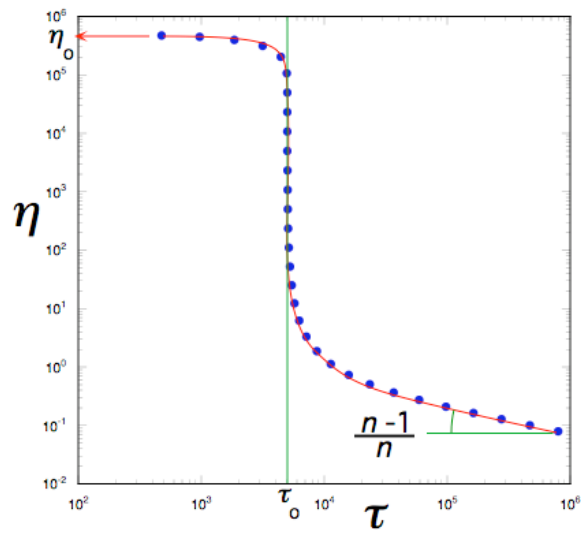


Figura 2.1: Gráfico de viscosidade em função da tensão de cisalhamento

A equação SMD é explicitada na equação (2.1).

$$\eta = \left(1 - \exp\left(\frac{-\eta_0 \dot{\gamma}}{\tau_0}\right) \right) \cdot \left(\frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + k \dot{\gamma}^{n-1} \right) \quad (2.1)$$

3. Descrição do projeto

Com o objetivo de simular o deslocamento de um fluido não newtoniano por um newtoniano em um meio poroso foi construída uma bancada experimental. Esta é composta por uma célula de Hele-Shaw e três reservatórios cilíndricos para comportar óleo, Carbopol e água, para limpeza. A Figura 3.1 descreve o projeto esquemático.



Figura 3.1: Projeto esquemático da bancada experimental

O fluido newtoniano utilizado é representado pelo óleo Teresso 46 que possui viscosidade de 90 cSt a 25°C e densidade 0,87. O fluido não newtoniano utilizado foi o Carbopol 676 [26-27] em duas diferentes concentrações, 0.09% e 0.15%.

A escolha do Carbopol como o fluido a ser deslocado deve-se ao fato de suas características reológicas serem similares às do petróleo, além de ser um fluido de fácil manipulação. Escolhemos o óleo Teresso 46, por ter características reológicas semelhantes às da água, aproximando o experimento a uma simulação de recuperação secundária.

O experimento consiste em visualizar uma célula de Hele-Shaw composta por duas placas paralelas de vidro separadas por uma distância milimétrica. A modelagem da célula retangular de Hele-Shaw que descreve esse experimento é apresentada no Anexo I.

As dimensões do canal, formado pelas placas de vidro de 6 mm de espessura, são: 150 mm de comprimento, 100 mm de largura e 1 mm de espaçamento (folga). A Figura 3.3 ilustra a região de interesse nesse trabalho e a Figura 3.3 apresenta uma vista explodida das células.

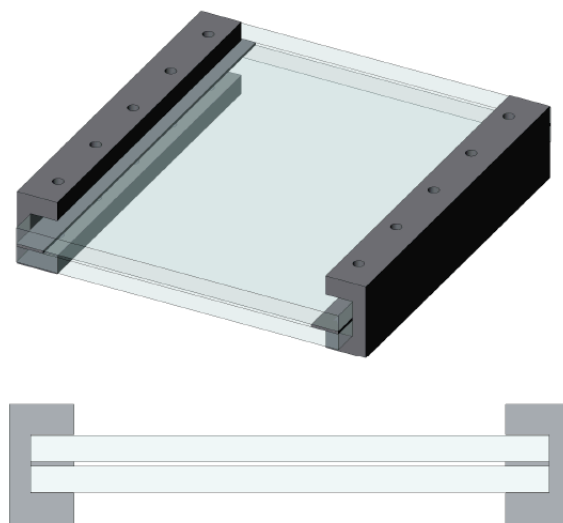


Figura 3.2: Vista 3D e transversal da célula de Hele-Shaw

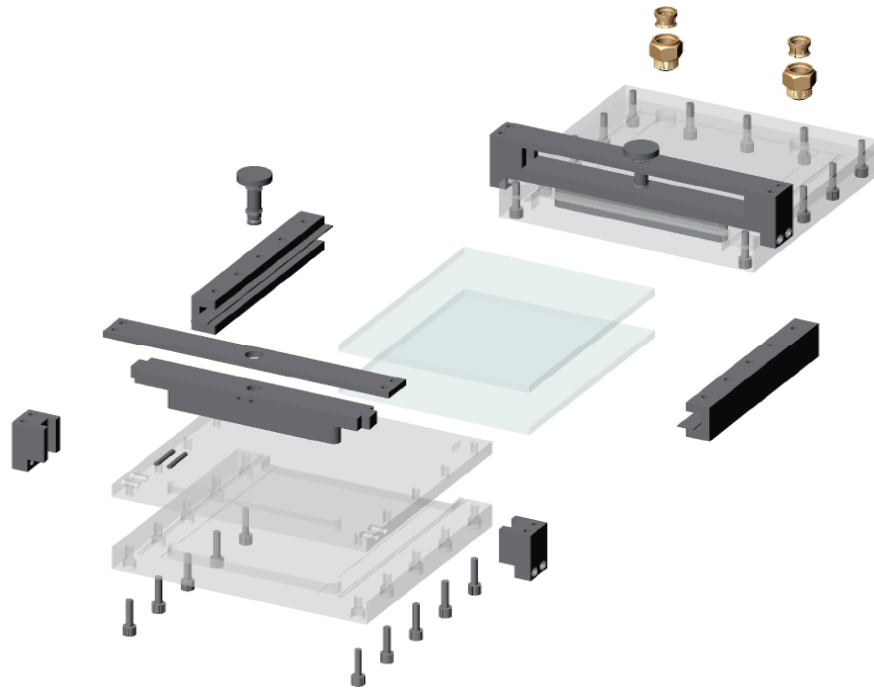


Figura 3.3: Vista explodida das células

As células de entrada e saída são feitas de acrílico e são acopladas à célula de Hele-Shaw garantindo a estabilidade da injeção do fluido deslocador, a continuidade do escoamento e a uniformidade da interface.

As válvulas guilhotina foram projetadas em aço inox com o objetivo de bloquear a passagem dos fluidos. Isso permite a lavagem e o preenchimento das células, além de serem essenciais para as condições de início do teste.

A Figura 3.4 abaixo ilustra as células e guilhotinas.

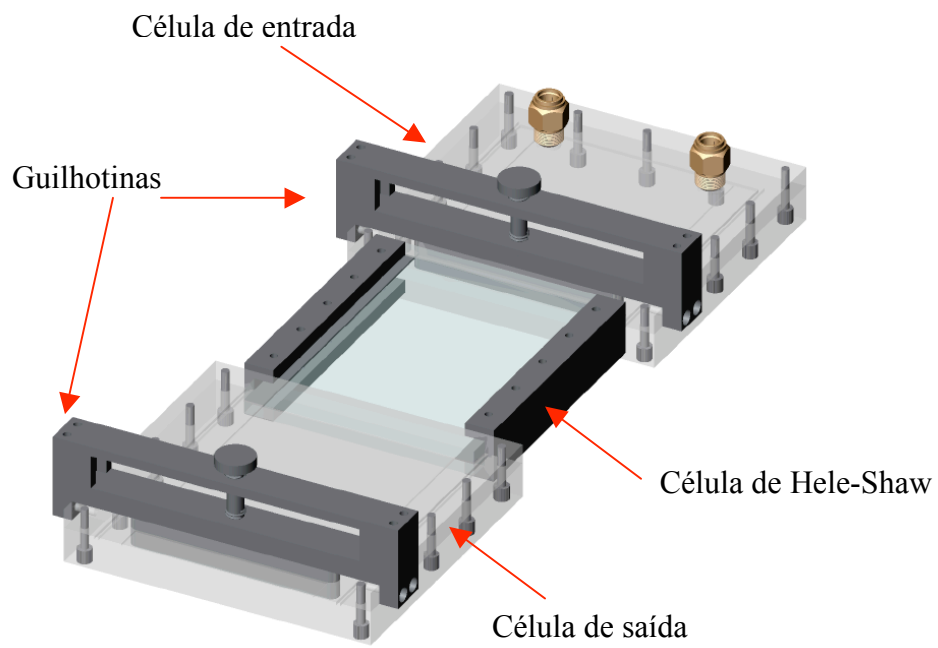


Figura 3.4: Células e guilhotinas

4. Procedimento experimental

4.1 Célula de Hele-Shaw

Pela célula de entrada é bombeado Carbopol, até que todas as células estejam completamente preenchidas. A seguir, fecha-se as válvulas guilhotina para bloquear o escoamento. A Figura 4.1 ilustra a foto retirada do experimento no início do teste com a célula de Hele-Shaw preenchida com Carbopol.

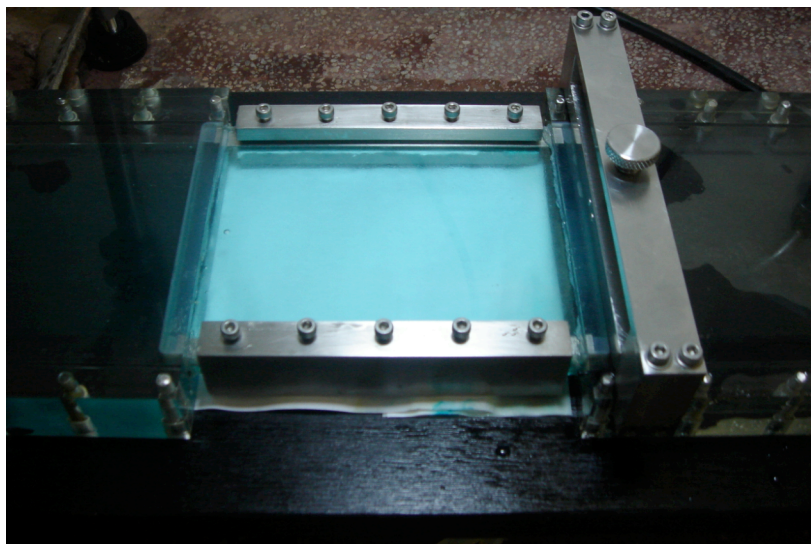


Figura 4.1: Célula preenchida com Carbopol preparada para o início do teste

Antes de cada teste foi feita uma verificação do nível das células para garantir que não há inclinação na região de escoamento. A Figura 4.2 exemplifica tal verificação.

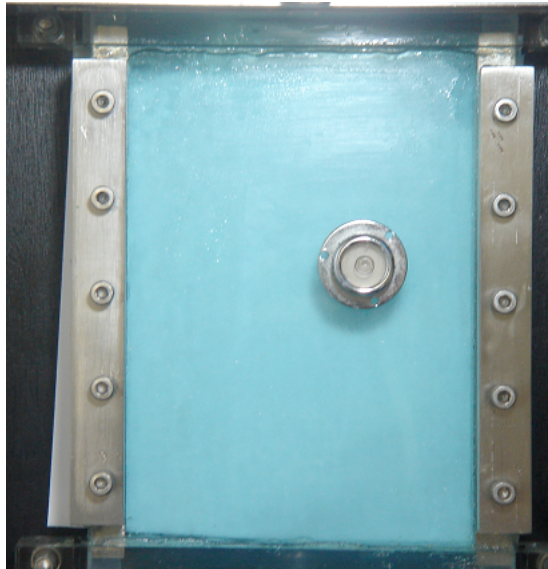


Figura 4.2: Nivelamento para início de teste

O próximo passo consiste em lavar com água a célula de entrada. Existem conectores na parte inferior desta célula, que permitem a saída da mistura de fluidos resultantes da lavagem.

Após a lavagem, inicia-se o processo de injeção de óleo para preencher primeiramente a célula de entrada.

Por conseguinte, as guilhotinas são abertas e o teste é iniciado. Uma câmera digital Sony Cyber shot DSC-T7 é utilizada para filmar a interface entre os fluidos. A bancada experimental pode ser vista na Figura 4.3 abaixo.

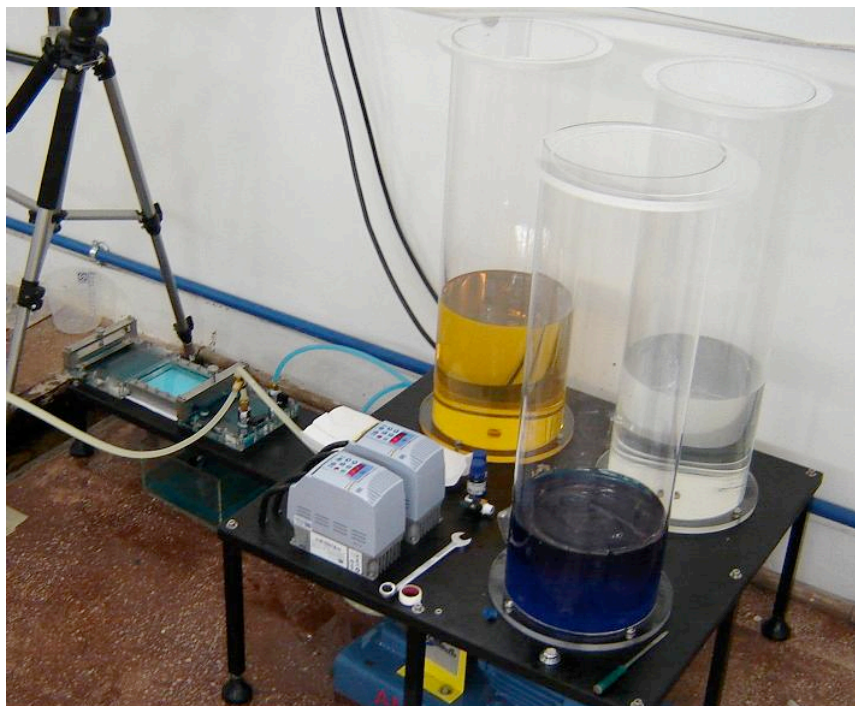


Figura 4.3: Bancada experimental

O experimento consiste na análise da variação da vazão na interface entre o Carbopol, com concentração 0.15% e 0.09%, e o óleo Teresso 46.

4.2 Reologia

Utilizamos o reômetro rotacional AR-G2 para realizar os seguintes testes: curva de viscosidade em função da taxa de deformação, tensão em função da taxa de deformação e as curvas G' e G'' para avaliar a elasticidade dos fluidos.

Para o Carbopol utilizamos a geometria cilindros concêntricos com paredes lisas. Para o teste de Rate Sweep, a faixa da taxa de deformação oscilou entre 100 s^{-1} e $3,5 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$. O intervalo de tempo utilizado entre as medidas para atingir o regime permanente foi de 120s. Para cada valor da taxa de deformação, foi medido um valor de viscosidade, tensão cisalhante, torque e velocidade.

Para o óleo mineral utilizamos a geometria Cone-Placa. Para o teste de Rate Sweep, a faixa de taxa de deformação oscilou entre 100 s^{-1} e 10^{-2} s^{-1} . Assim como para o Carbopol, o intervalo de tempo entre as medidas de 120s para atingir o regime permanente.

Para modelar a função de viscosidade foi escolhida a equação SMD (2.1) para o Carbopol e um modelo linear para o óleo.

Para o teste dinâmico Strain Sweep do óleo mineral, foi utilizada a frequência de 5 rad/s. O Strain Sweep apresenta como resultado G' e G'' em função da deformação.

Ao observar a faixa linear do gráfico obtido para o teste Strain Sweep, identifica-se a deformação correspondente à faixa viscoelástica linear. Para o teste dinâmico Frequency Sweep foi utilizada a deformação de 40% com frequência inicial de 10 rad/s e frequência final de 628,3 rad/s. Através desse teste obtém-se como resultado G' e G'' em função da frequência angular.

Para o teste dinâmico Strain Sweep do Carbopol, foi utilizada inicialmente a frequência de 5 rad/s. A deformação inicial aplicada foi de 0,001% e a final foi de 100%.

Ao analisar a faixa linear do gráfico obtido para o teste Strain Sweep, identificou-se uma deformação correspondente à faixa viscoelástica linear de 5% para o Carbopol 0,09% e de 0,09986% para o Carbopol 0,15%. Para o teste dinâmico Frequency Sweep utilizamos tais deformações associadas a frequência inicial de 0,01 rad/s e a frequência final de 100 rad/s.

5. Discussão e Resultados

Nesse capítulo são apresentados e confrontados os resultados obtidos experimentalmente para o deslocamento de um fluido não newtoniano por um newtoniano. Os resultados dos testes são apresentados na forma de um conjunto de dez imagens ilustrando a evolução da forma da interface. Para cada razão de viscosidade referente ao óleo e o Carbopol foram feitos dois testes com diferentes velocidades. A avaliação magnitude da velocidade foi feita qualitativamente, onde para cada caso, $V1 < V2$.

5.1 Reologia

Utilizamos o reômetro rotacional AR-G2 com a geometria cilindros concêntricos com parede lisa para o Carbopol e Cone-placa para o óleo. A geometria utilizada para determinar a reologia do Carbopol não é a mais adequada. Observamos a presença do fenômeno de deslizamento o que indica uma incerteza nos resultados para baixas taxas de deformação.

5.1.1 Óleo Mineral

Analisando os gráficos da 5.1 dos testes Rate Sweep para viscosidade e tensão, podemos observar um comportamento newtoniano, isto é, a viscosidade não varia com a taxa de deformação. Ela se mantém constante a 0,0855 Pa.s.

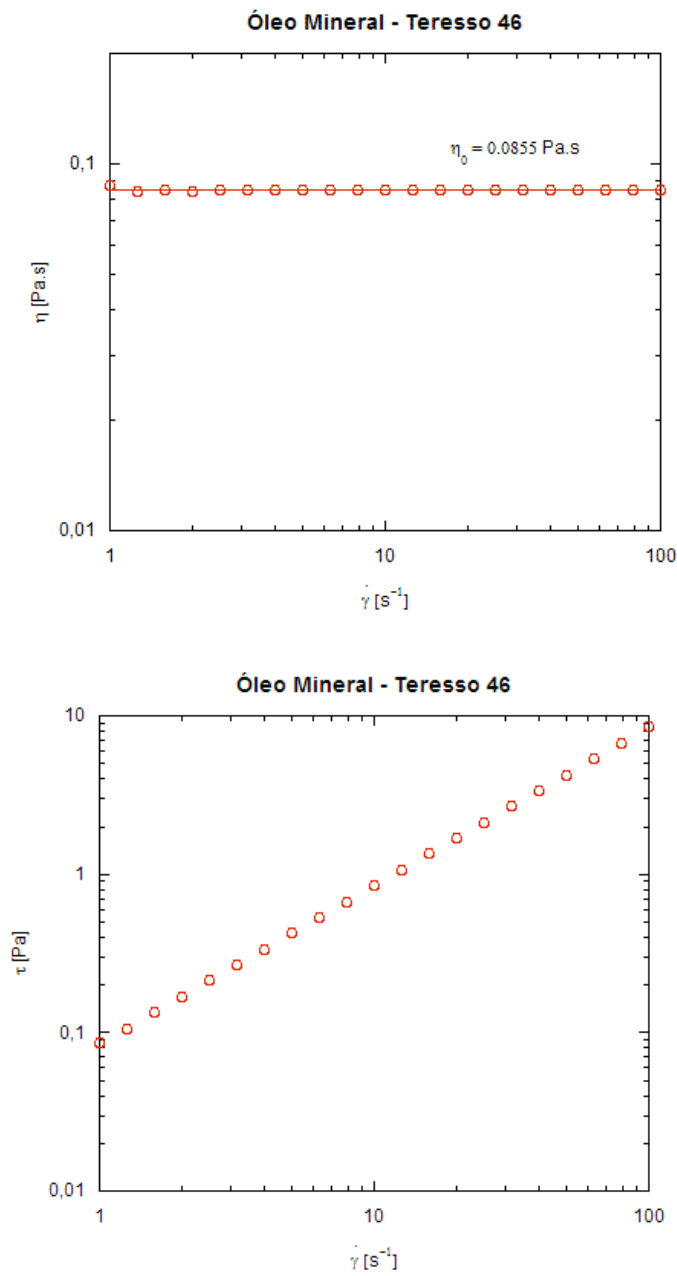


Figura 5.1: viscosidade e tensão em função da taxa de deformação do óleo

O teste de Strain Sweep é apresentado na 5.2 e fornece a deformação para o teste de Frequency Sweep que é ilustrado na 5.3. Analisando esses resultados, pode-se perceber que os valores de G'' no teste Strain Sweep são constantes para todos os valores plotados de deformação. Todos os valores de G' são nulos, comprovando a ausência de elasticidade e o não armazenamento de energia do fluido. A faixa viscoelástica linear selecionada para o teste

Frequency Sweep foi equivalente à deformação de 40%. Este teste apresenta valores de G'' maiores que os de G' , atestando uma maior importância do módulo de dissipação.

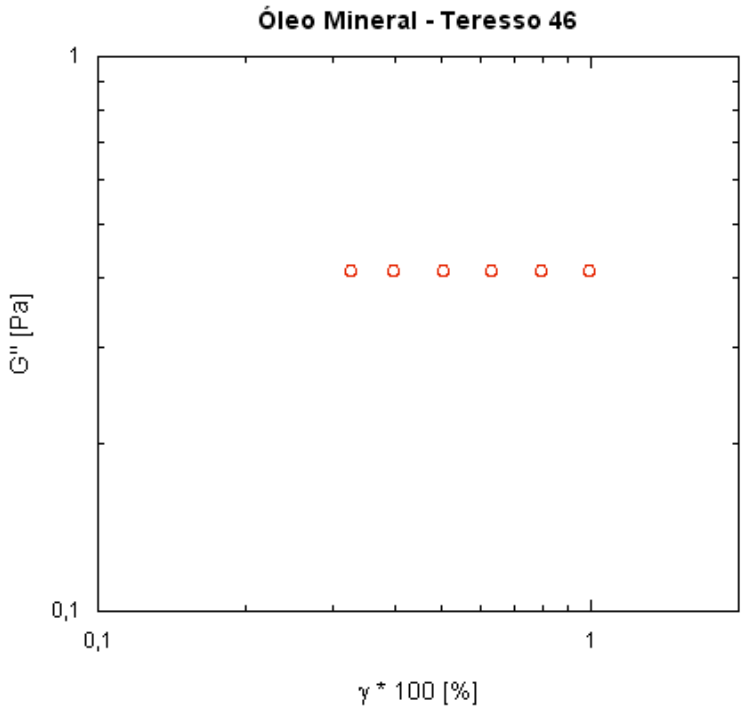


Figura 5.2: strain sweep para o óleo mineral

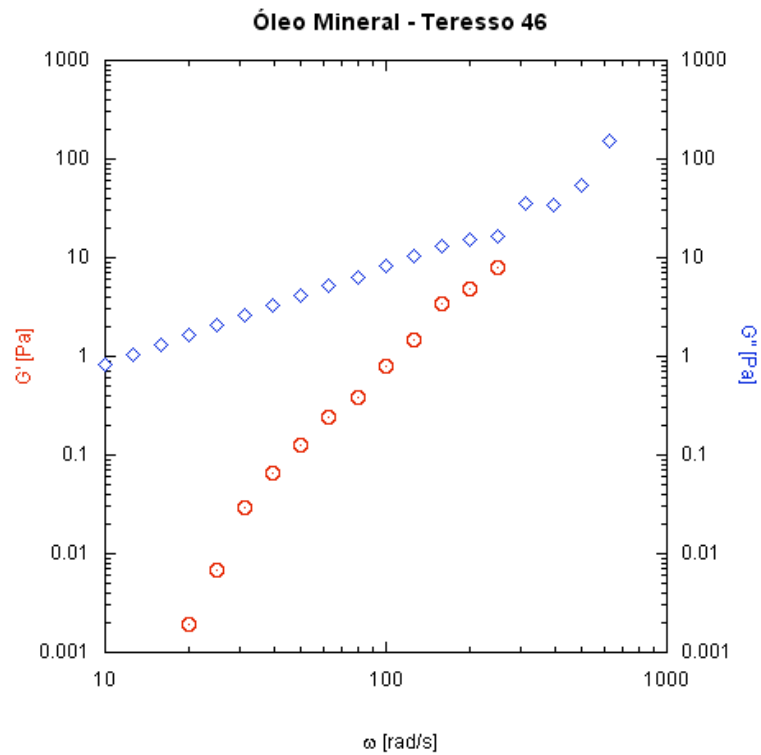


Figura 5.3: frequency sweep para o óleo mineral

5.1.2 Carbopol 0.15%

Para o gráfico de viscosidade do teste Rate Sweep (Fig. 5.4) utilizamos a equação SMD (2.1) para fazer um *curve fitting* e determinar os parâmetros reológicos do fluido. O η_0 utilizado foi 1000000 Pa.s e os resultados obtidos foram: $n = 0,504$, $K = 2,776 \text{ Pa}\cdot\text{s}^n$ e $\tau_0 = 12,458 \text{ Pa}$.

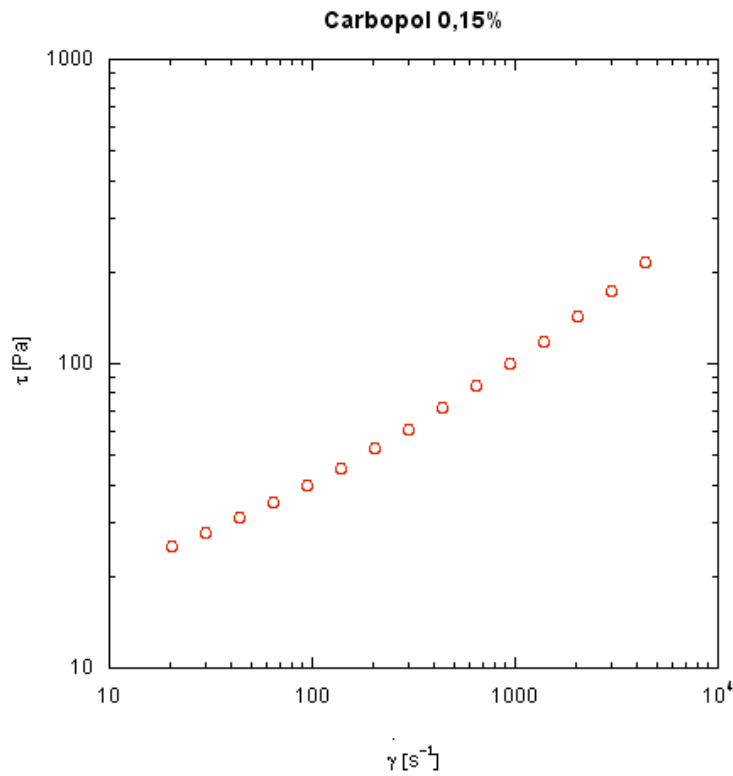
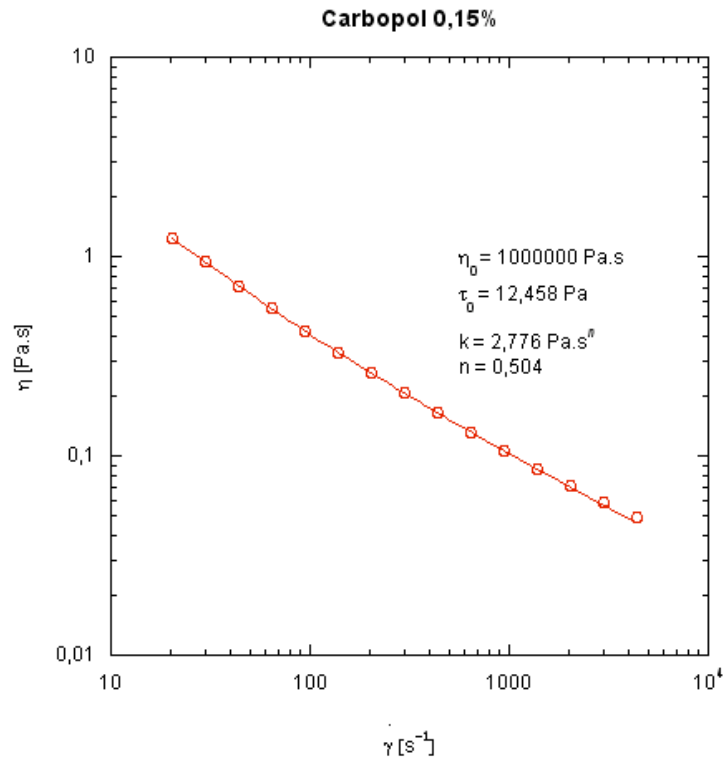


Figura 5.4: viscosidade e tensão em função da taxa de cisalhamento

A Fig. 5.5 representa o teste de Strain Sweep e a Fig. 5.6 apresenta os dados do teste Frequency Sweep. Ao analisar esses resultados, pode-se perceber que os valores de G' no teste Strain Sweep são maiores que os de G'' . A faixa viscoelástica linear selecionada para o teste Frequency Sweep foi equivalente à deformação de 0,09986%. Este teste apresenta valores de G' maiores que os de G'' o que caracteriza o Carbopol 0,15% como um fluido viscoelástico.

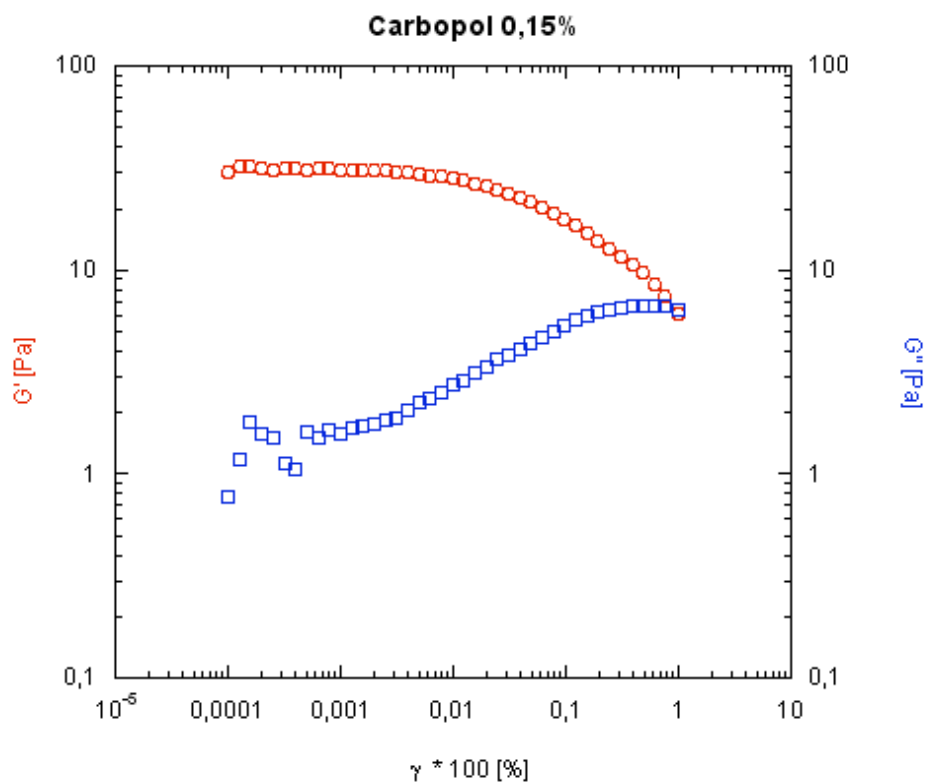


Figura 5.5: strain sweep para o carbopol 0.15%

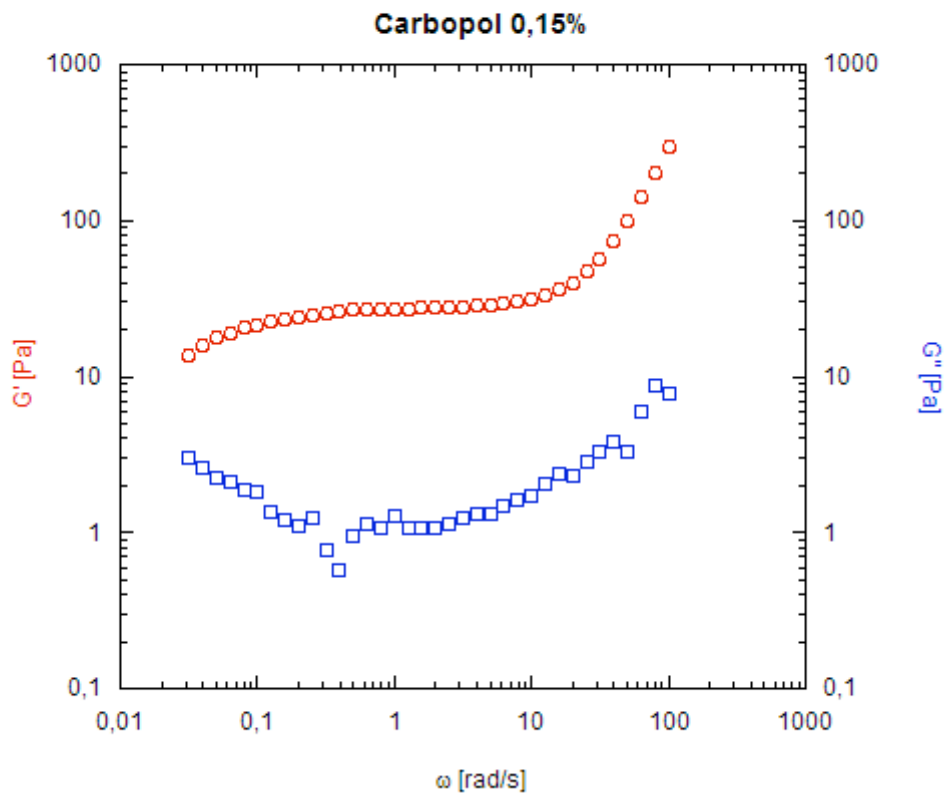


Figura 5.6: frequency sweep para o carbopol 0.15%

5.1.3 Carbopol 0.09%

Utilizando a mesma metodologia para determinação dos parâmetros reológicos do Carbopol 0,15%, foram plotados os gráficos correspondentes à Fig. 5.7. O η_0 utilizado foi de 100000 Pa.s e os resultados obtidos foram: $n = 0,629$, $K = 0,266 \text{ Pa.s}^n$ e $\tau_0 = 0,198 \text{ Pa.}$

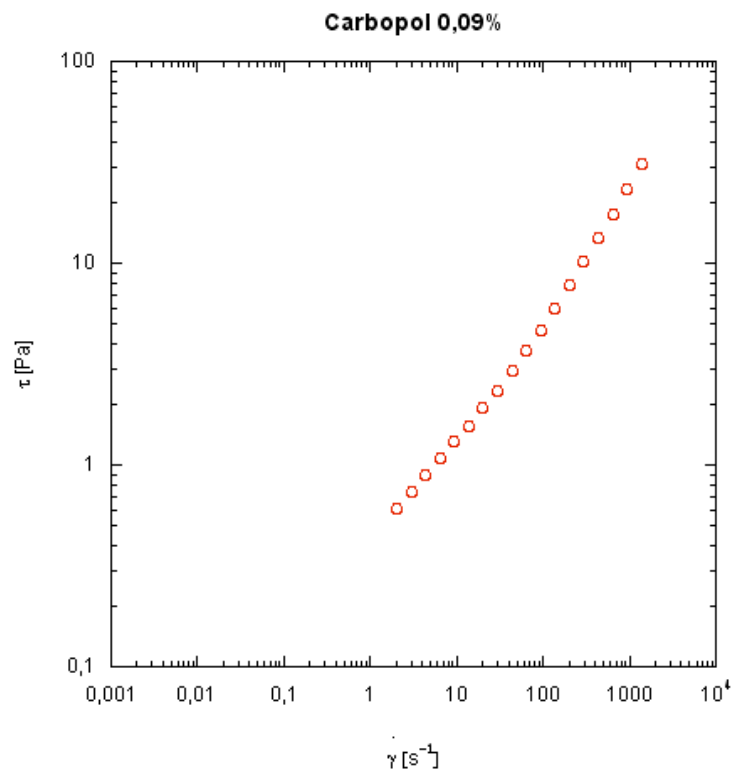
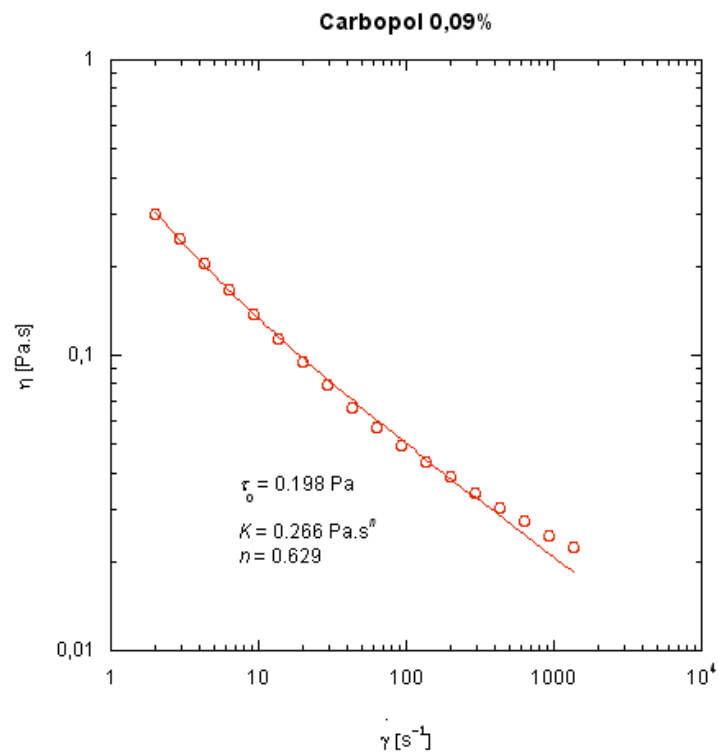


Figura 5.7: viscosidade e tensão para o carbopol 0.09%

Os testes Strain Sweep e Frequency Sweep são ilustrados nas Figs 5.8 e 5.9.

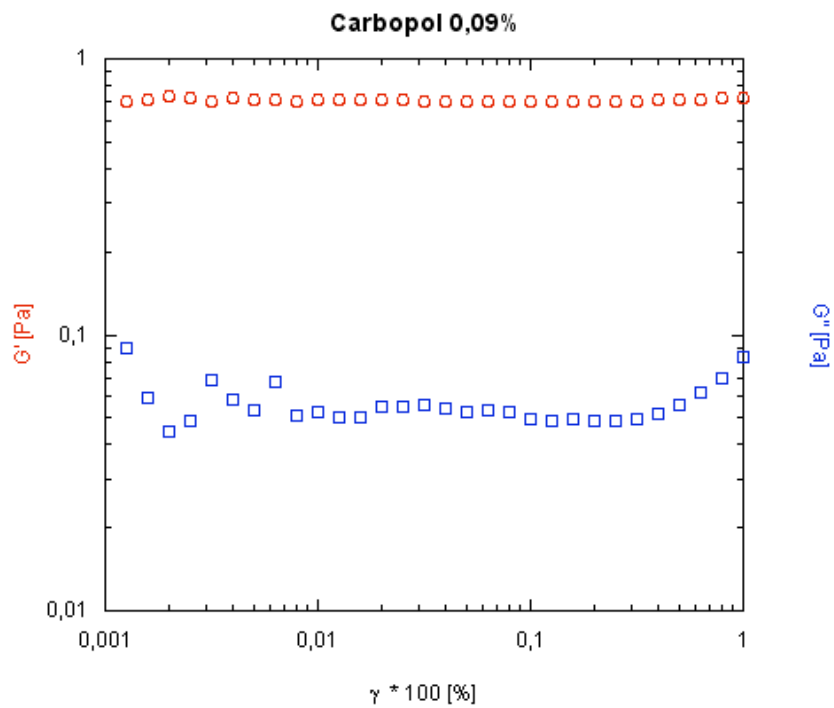


Figura 5.8: strain sweep para o carbopol 0.09%

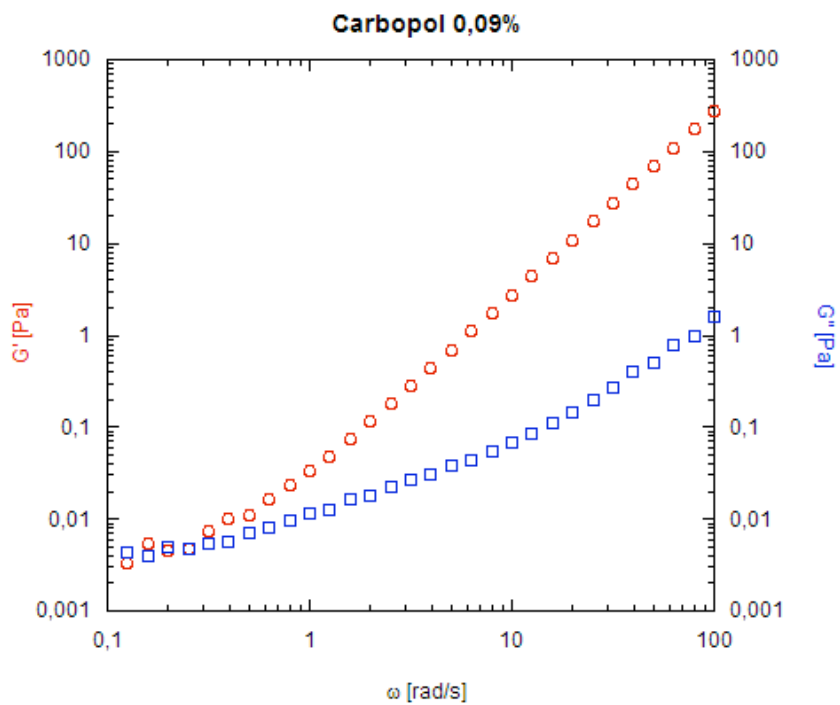


Figura 5.9: frequency sweep para o carbopol 0.09%

Ao analisar esses resultados, pode-se perceber que os valores de G' no teste Strain Sweep são maiores que os de G'' . A faixa viscoelástica linear selecionada para o teste Frequency Sweep foi equivalente à deformação de 5%. Este teste apresenta valores de G' maiores que os de G'' o que caracteriza o Carbopol 0,09% como um fluido viscoelástico.

5.1.4 Adimensionalização

Com o objetivo de adimensionalizar a viscosidade entre o fluido deslocador e deslocante, efetuou-se a razão entre a viscosidade desses fluidos. A viscosidade do óleo, fluido newtoniano, obtida foi de 0,0855 Pa.s. Para encontrar a viscosidade do Carbopol, extrapolou-se a linha de tendência dos gráficos dos testes de Rate Sweep a fim de determinar a taxa de deformação correspondente a tensão limite de escoamento. Com o valor encontrado, buscamos a viscosidade correspondente no gráfico de viscosidade em função da taxa de deformação. Assim, os valores encontrados para o Carbopol 0,15% foi de 2 Pa.s e para o Carbopol 0,09% foi de 0,4 Pa.s.

A adimensionalização em relação a viscosidade para os testes efetuados na célula de Hele-Shaw considerando o Carbopol 0,15% como fluido deslocador foi de $\frac{\eta_{\text{óleo}}}{\eta(\dot{\gamma}_1)} = 42,75\%$. Da

mesma forma, utilizando o Carbopol 0,09%, $\frac{\eta_{\text{óleo}}}{\eta(\dot{\gamma}_1)} = 21,37\%$.

5.2 $\frac{\eta_{\text{óleo}}}{\eta(\dot{\gamma}_1)} = 42,75\%$

Nas

Figura 5.2 e Figura 5.3 pode-se avaliar a diferença na evolução da interface para a razão de viscosidades igual a 42,75%. A

Figura 5.2 representa o escoamento do óleo com velocidade inferior a da apresentada na Figura 5.3.

Observa-se a formação de dois *fingers* principais para ambos os casos. Estes são os caminhos preferenciais percorridos pelo óleo, ou seja, este não consegue deslocar grande parte do Carbopol presente na célula.

Comparando essas duas seções de imagens, pode-se observar que com uma menor velocidade há maior ramificação dos *fingers*. O crescimento destes pode ser reduzido em função do acréscimo de ramificações, que ocorrem devido a quebra da estabilidade, as quais diminuem ou mantêm constante a velocidade de ponta do *finger*. Após a ramificação, a velocidade entre os dois *fingers* resultantes decresce e a interface dessa região pára de crescer. Entretanto, a velocidade da região em torno desses *fingers* é alta, assim a interface avança.

Como para o caso da Figura 5.3 não houve ramificações expressivas em cada *finger*, já era de se esperar que a espessura do *finger* fosse maior que no caso da Figura 5.2.

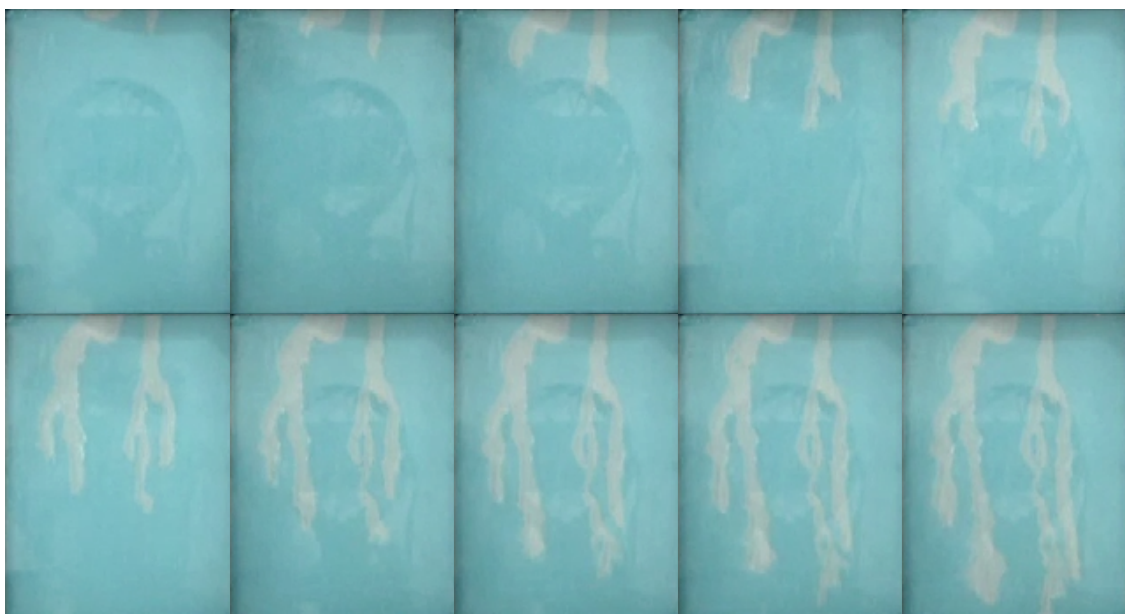


Figura 5.2: Visualização do escoamento para $\frac{\eta_{\text{óleo}}}{\eta(\dot{\gamma}_1)} = 42,75\%$ com velocidade V1

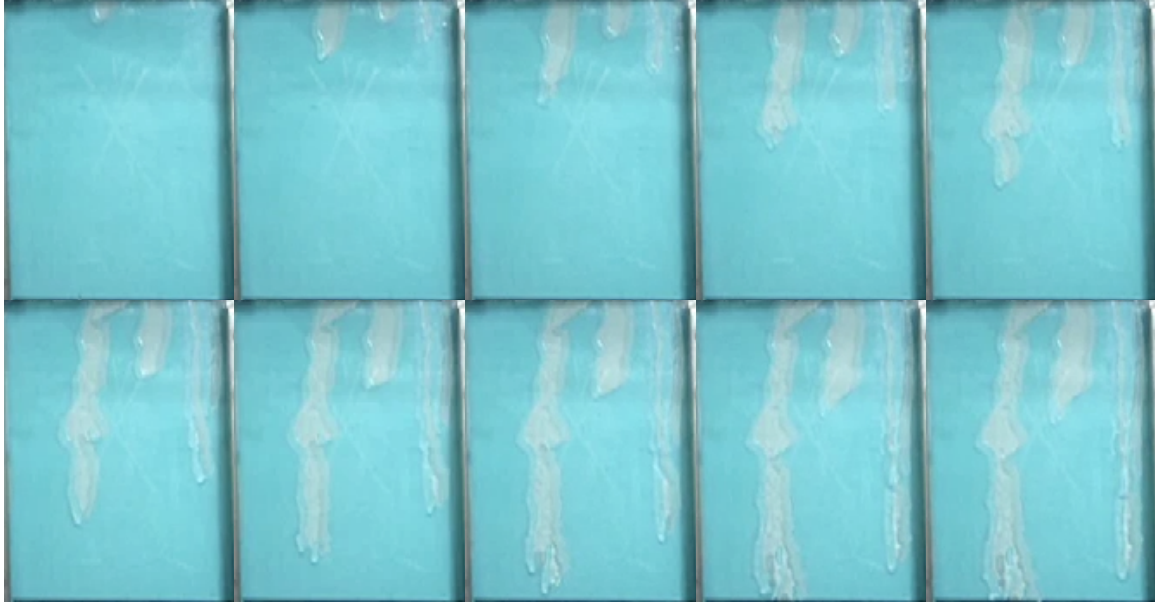


Figura 5.3: Visualização do escoamento para $\frac{\eta_{\text{óleo}}}{\eta(\dot{\gamma}_1)} = 42,75\%$ com velocidade V2

5.3 $\frac{\eta_{\text{óleo}}}{\eta(\dot{\gamma}_1)} = 21,37\%$

A evolução da interface para a razão de viscosidades de 21,37% pode ser avaliada nas **Error! Reference source not found.** e

Figura 5.5. A

Figura 5.2 velocidade de deslocamento do óleo na **Error! Reference source not found.** é inferior à do caso da

Figura 5.5.

Para essa razão de viscosidades, observa-se a formação de diversos *fingers* que se unem em um bloco único de deslocamento. Este compreende toda a seção de entrada, de modo que o escoamento do óleo deixe depositada pequena quantidade de Carbopol na célula de Hele-Shaw.

A partir da análise dos conjuntos de imagens, pode-se observar que para maiores velocidades de escoamento, há maiores percentuais de resíduos de Carbopol depositados na célula.

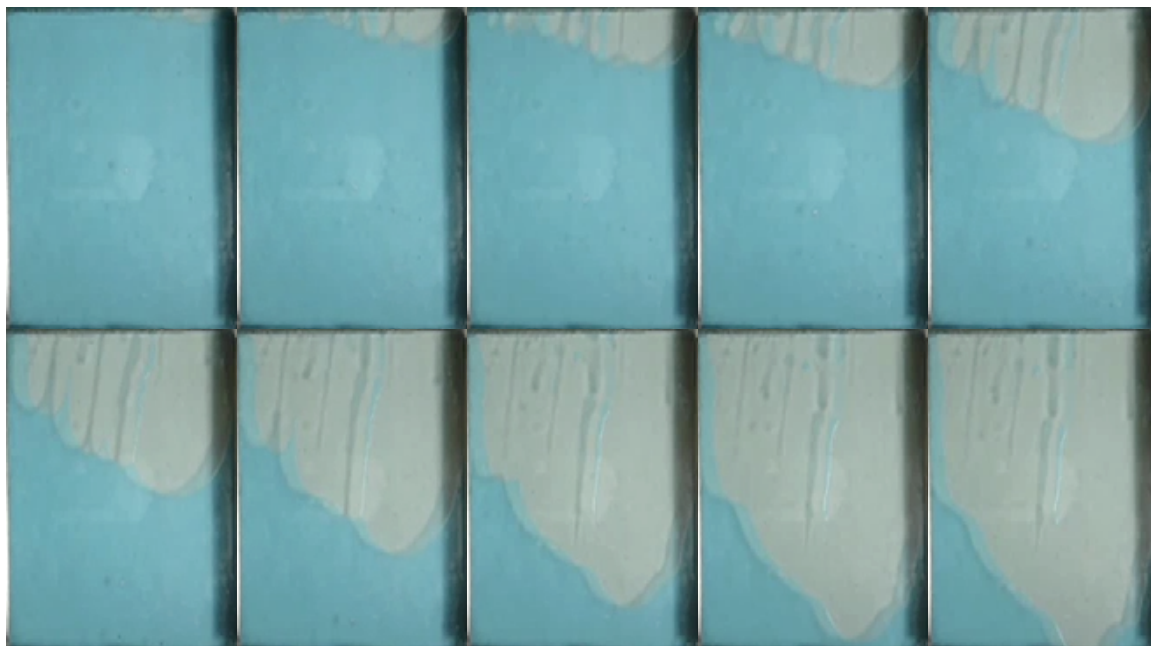


Figura 5.4: Visualização do escoamento para $\frac{\eta_{\text{óleo}}}{\eta(\dot{\gamma}_1)} = 21,37\%$ com velocidade V1

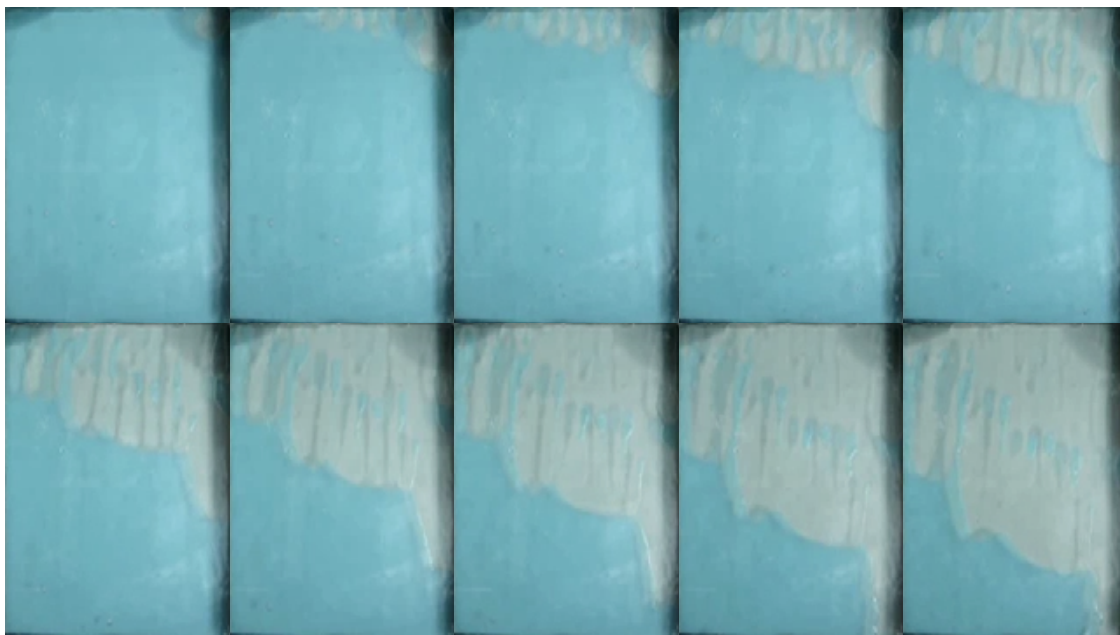


Figura 5.5: Visualização do escoamento para $\frac{\eta_{\text{óleo}}}{\eta(\dot{\gamma}_1)} = 21,37\%$ com velocidade V2

5.4 Análise dos testes com diferentes razões de viscosidades

A partir da comparação entre as imagens dos testes do caso $\frac{\eta_{\text{óleo}}}{\eta(\dot{\gamma}_1)} = 42,75\%$ e do caso

$\frac{\eta_{\text{óleo}}}{\eta(\dot{\gamma}_1)} = 21,37\%$, constata-se que a eficiência de recuperação do Carbopol foi maior para o caso

com menor razão de viscosidades. Observa-se que a formação de *fingers* está diretamente relacionada a razão de viscosidades, visto que há uma maior ramificação para razões de viscosidade maiores. Essas ramificações formam caminhos preferenciais, que não permitem que todo Carbopol presente na célula sofra influência do escoamento de óleo.

Era de esperar que a propagação da interface entre os fluidos fosse simétrica, porém verifica-se que o escoamento do óleo começa pelo lado direito da imagem. Ocorreram algumas imperfeições de construção que ocasionaram em uma inclinação inesperada na guilhotina da célula de entrada. Isso permitiu um maior fluxo de óleo pelo lado direito das imagens apresentadas.

6. Considerações finais

A fim de simular a recuperação secundária em um poço de petróleo, no presente trabalho foi analisado o deslocamento de um fluido não newtoniano por um newtoniano em uma célula de Hele-Shaw. O escopo do projeto consistiu na análise visual da evolução da interface em função dos parâmetros reológicos e da variação da vazão do escoamento.

O fluido não newtoniano é representado pelo Carbopol, em duas diferentes concentrações, e o fluido newtoniano, por um óleo mineral. A partir da determinação da reologia desses fluidos, foi possível determinar a razão de viscosidade entre o óleo e o Carbopol. Com essa adimensionalização foram obtidas as relações $\frac{\eta_{\text{óleo}}}{\eta(\dot{\gamma}_1)} = 42,75\%$ e $\frac{\eta_{\text{óleo}}}{\eta(\dot{\gamma}_1)} = 21,37\%$.

Verificamos para $\frac{\eta_{\text{óleo}}}{\eta(\dot{\gamma}_1)} = 42,75\%$ a formação de dois *fingers* principais que se ramificam ao longo do escoamento formando caminhos preferenciais. Constatou-se que para menores velocidades há maior ramificação dos *fingers*.

Para $\frac{\eta_{\text{óleo}}}{\eta(\dot{\gamma}_1)} = 21,37\%$ foi observada a formação de diversos *fingers* que se unem ao longo do deslocamento. Verificou-se que para maiores velocidades de escoamento há maiores percentuais de resíduos de Carbopol depositados na célula.

Comparando os resultados obtidos para as duas razões de viscosidades, conclui-se que a eficiência de recuperação do fluido não newtoniano foi maior para o caso com menor razão de viscosidades. Em um reservatório de petróleo, ramificações devem ser evitadas a fim de maximizar a produção de petróleo impedindo a produção do fluido injetor.

Ocorreram algumas imperfeições de construção que ocasionaram em uma inclinação inesperada na guilhotina da célula de entrada. Com isso, uma assimetria na propagação da interface entre os fluidos foi observada.

Propomos para trabalhos futuros, uma melhoria nos sistemas de válvulas guilhotina para corrigir o alinhamento, investir em tecnologia de tratamento de imagens e tratar quantitativamente a vazão. Sugerimos também a utilização de outras geometrias para determinação da reologia do Carbopol, como por exemplo o Grooved Couette que foi desenvolvido na PUC-Rio pelo GReo. Essa geometria minimiza o efeito de deslizamento, aumentando a confiabilidade dos testes.

Referências bibliográficas

- [1] <http://www2.petrobras.com.br/EspacoConhecer/Produtos/DerivadosdoPetroleo.asp>, acessado em 17 de julho de 2007.
- [2] <http://www.onip.org.br>, acessado em 30 de julho de 2007.
- [3] Mustafa, G. S.; Souza, A. O. A. B; Rocha, P. S. M. V. Utilização de emissões industriais gasosas para rejuvenescimento de campos maduros de petróleo. Eng. Sanitária e Ambiental, Vol.8, nº. 4, p. 209-212, out/dez 2003.
- [4] Moghadasi, J. et al. Theoretical and experimental study of particle movement and deposition in porous media during water injection. J.Petr. Sci. Eng., nº.43, p.163-181, 2004.
- [5] Thomas, J. E. et al. Reservatórios In: Fundamentos de Engenharia de Petróleo. Interciência, Rio de Janeiro, 2001.
- [6] Vossoughi, S. Profile modification using in situ gelation technology – a review. J. Petr. Sci. Eng., nº. 26, p. 199-209, 2000.
- [7] Furati, K.M. History effects on oil recovery efficiency. J.Petr. Sci. Eng., nº.19, p.295-308, 1998.
- [8] <http://www.biodieselbr.com/energia/agro-energia.htm>, acessado em 4 de dezembro de 2007.
- [9] Pinto, S. F. Formações de padrões em meios granulares. Dissertação de mestrado em física na Universidade Federal de Viçosa, Minas Gerais, 2006.
- [10] Yamamoto, T.; Kamikawa, H.; Tanaka, H.; Nakamura, K.; Mori, N. Viscous Fingering of Non-Newtonian Fluids in a Rectangular Hele-Shaw Cell. Journal of the Society of Rheology – Japan, Vol. 29, nº 2, p. 81-87, 2001.
- [11] Yamamoto, T.; Kimoto, R.; Mori, N. Tip Velocity of Viscous Fingers in Shear-Thinning Fluids in a Hele-Shaw Cell. JSME International Journal, Vol. 48, nº 4, p. 756-762, 2005.

- [12] Yamamoto, T. Numerical and Experimental Analyses of Unsteady Viscoelastic Flow in Complex Flow Field. *Journal of the Society of Rheology - Japan*, Vol. 34, p. 283-289, 2006.
- [13] Yamamoto, T.; Nakamura, Y.; Yamashita, A.; Hashimoto, T.; Mori, N. Anomalous motion of viscous fingers in surfactant solutions in a Hele-Shaw cell. *Rheol Acta*, Vol. 45, p. 250-259, 2006
- [14] Yamamoto, T.; Kamikawa, H.; Mori, N.; Nakamura, K. Numerical Simulation of Viscous Fingering in Non-Newtonian Fluids in a Hele-Shaw Cell. *Journal of the Society of Rheology – Japan*, Vol. 30, n° 3, p. 121-127, 2002.
- [15] Chevalier, C.; Amar, M.B.; Bonn, D.; Lindner, A. Inertial effects on Saffman--Taylor viscous fingering. *J. Fluid Mech*, Vol. 552, p. 83-97, 2006.
- [16] Amar, M.B.; Poiré, E.C. Pushing a non-Newtonian fluid in a Hele-Shaw cell: From fingers to needles. *Physics of Fluids*, Vol. 11, n° 7, p. 1757-1767, 1999.
- [17] Lindner, A.; Bonn, D.; Meunier, J. Viscous fingering in a shear-thinning fluid. *Physics of Fluids*, Vol. 12, n° 12, p. 256-261, 2000.
- [18] Lindner, A.; Coussot, P.; Bonn, D. Viscous Fingering in a Yield Stress Fluid. *Physical Review Letters*, Vol. 85, n° 2, p. 314-317, 2000.
- [19] Coussot, P. Saffman-Taylor instability in yield-stress fluids. *J. Fluid Mech.*, Vol. 380, p. 363-376, 1999.
- [20] Alexandrou, A.N.; Entov, V.; Kolganov, S.S.; Kolganova, N.V. On bubble rising in a Hele-Shaw cell filled with a non-Newtonian fluid. *Euro. Jnl of Applied Mathematics*, Vol. 15, p. 315-327, 2004.
- [21] Alexandrou, A.N.; Entov, V. On the steady-state advancement of fingers and bubbles in a Hele-Shaw cell filled by a non-Newtonian fluid. *Euro. Jnl of Applied Mathematics*, Vol. 8, p. 77-87, 1997.

- [22] Bonn, D. ; Meunier, J. Viscoelastic Free-Boundary: Non-Newtonian Viscosity vs Normal Stress Effects. *Physical Review Letters*, Vol. 79, n° 14, p. 2662-2665, 1997.
- [23] Lee, A.G.; Shaqfeh, E.S.G.; Khomami, B. A study of viscoelastic free surface flows by the finite element method: Hele-Shaw and slot coating flows. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 108, p. 327-362, 2002.
- [24] Kondic, L.; Shelley, M.J.; Palffy-Muhoray, P. Non-Newtonian Hele-Shaw Flow and the Saffman-Taylor Instability. *Physical Review Letters*, Vol. 7, n° 80, p. 1433-1436, 1998.
- [25] Souza mendes, P.R.; Dutra, E.S.S. Viscosity Function for Yield-Stress Liquids. *Applied Rheology*, Vol. 14, n° 6, p. 296-302, 2004.
- [26] Noveon, Inc. Carbopol – Polymeric Rheology Modifiers.
www.homecare.noveoninc.com/presentation/carbopol2
- [27] Piau, J.M. Carbopol gels: Elastoviscoplastic and slippery glasses made of individual swollen sponges Meso- and macroscopic properties, constitutive equations and scaling laws. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 144, p. 1-29, 2007.

Anexo I

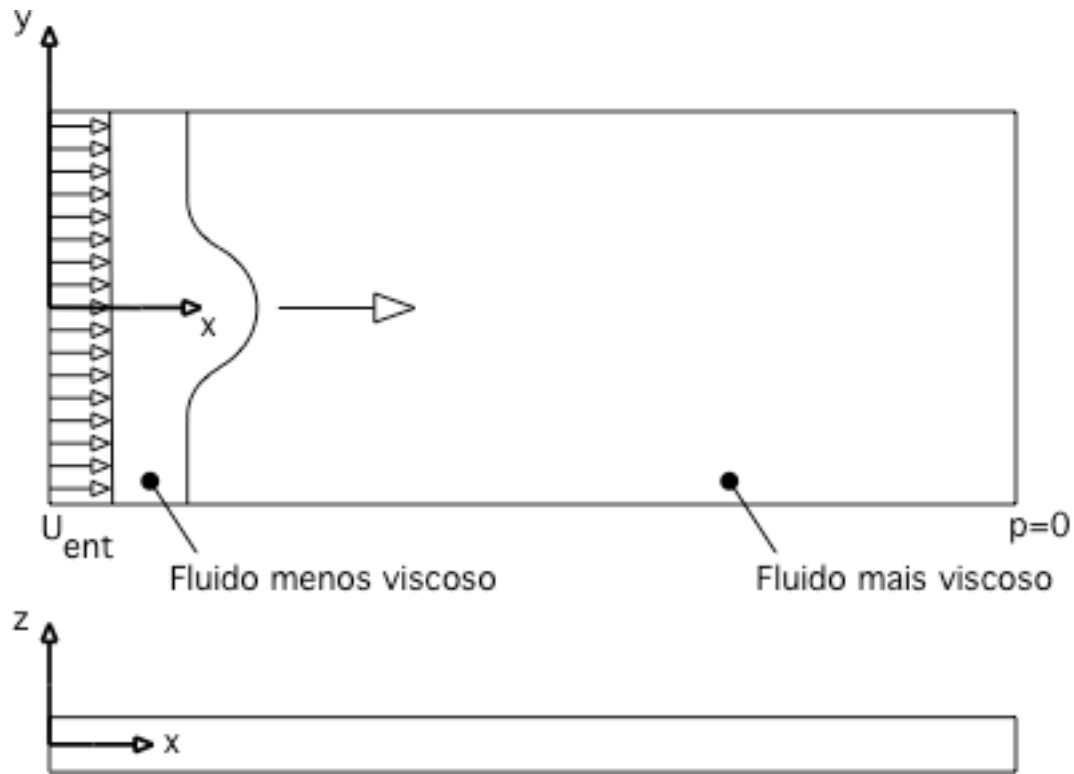


Figura A1: Célula retangular de Hele-Shaw

Pela equação de continuidade,

$$\nabla \rho \vec{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{A.1})$$

Assumindo escoamento incompressível e bidimensional temos que,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{A.2})$$

Sendo h a metade da distância de folga entre as células, u e v as velocidades na direção x e y , respectivamente. Em termos de velocidade média,

$$\frac{\partial(\bar{u}h)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}h)}{\partial y} = 0 \quad (\text{A.3})$$

Sendo,

$$\bar{u}(x,y) = \frac{1}{h} \int_0^h u(x,y,z) dz \quad (\text{A.4})$$

$$\bar{v}(x,y) = \frac{1}{h} \int_0^h v(x,y,z) dz \quad (\text{A.5})$$

Pela equação da quantidade de movimento, temos que

$$\rho \frac{dv}{dt} = \nabla T + \rho \underline{g} \quad (\text{A.6})$$

$$0 = \nabla(-p + 2\eta D) + \rho \underline{g} \quad (\text{A.7})$$

Sendo,

$$D = \frac{1}{2} (\nabla v + \nabla v^T) \quad (\text{A.8})$$

Logo,

$$0 = -\nabla p + \nabla(\eta \nabla v) + \rho \underline{g} \quad (\text{A.9})$$

Assim,

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \rho g_x \quad (\text{A.10})$$

Assumir que $\frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0$ e $\frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$.

Assim,

$$\frac{\partial P}{\partial x} - F_x = + \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta(\dot{\gamma}) \frac{\partial u}{\partial z} \right) \equiv \Lambda_x \quad (\text{A.11})$$

Analogamente,

$$\frac{\partial P}{\partial y} - F_y = + \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta(\dot{\gamma}) \frac{\partial v}{\partial z} \right) \equiv \Lambda_y \quad (\text{A.12})$$

Onde F_x e F_y representam as forças de corpo e P expressa a pressão. Considerou-se uniforme a distribuição de pressão na direção z.

Integrando as equações (A.11) e (A.12) em z considerando as condições de contorno,

$$\frac{du}{dz} = \frac{dv}{dz} = 0 \text{ em } z = 0 \text{ e } u = v = 0 \text{ em } z = \pm h,$$

$$\int_{-h}^h \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta(\dot{\gamma}) \frac{\partial u}{\partial z} \right) dz = \int_{-h}^h \Lambda_x dz \quad (\text{A.13})$$

Logo,

$$u(x, y, z) = -\Lambda_x \int_z^h \frac{\xi}{\eta(\dot{\gamma})} d\xi \quad (\text{A.14})$$

Analogamente,

$$v(x, y, z) = -\Lambda_y \int_z^h \frac{\xi}{\eta(\dot{\gamma})} d\xi \quad (\text{A.15})$$

Sendo a fluidez S definida por,

$$S = \int_0^h \frac{z^2}{\eta(\dot{\gamma})} dz \quad (\text{A.16})$$

Assim,

$$\bar{u}(x, y) = -\frac{S}{h} \Lambda_x \quad (\text{A.17})$$

Analogamente,

$$\bar{v}(x, y) = -\frac{S}{h} \Lambda_y \quad (\text{A.18})$$

Substituindo (A.17) e (A.18) em (A.3),

$$\frac{\partial}{\partial x} (-S\Lambda_x) + \frac{\partial}{\partial y} (-S\Lambda_y) = 0 \quad (\text{A.19})$$

No presente estudo, o fluido que preenche a célula é não newtoniano. Assim, a equação de viscosidade SMD (3.2) pode ser aplicada.