Sistemas caóticos simples

Aluna: Simone Bochner de Araújo
Orientadora: Celia Anteneodo

Introdução

Uma grande variedade de sistemas apresenta comportamentos complicados, irregulares, imprevisíveis, em maior ou menor grau, a exemplo do clima, de certos circuitos elétricos e reações químicas, o tráfego de carros, ou inclusive o aparentemente regular sistema solar [1].

Com efeito, não-linearidades, presentes em quase todo sistema, podem tornar a sua evolução não trivial. Em particular, o caos é um dos comportamentos que podem ser observados em sistemas não-lineares para determinados valores dos parâmetros. Em tais casos, uma pequena perturbação nas condições iniciais pode resultar numa grande diferença em tempos posteriores. Trajetórias inicialmente muito próximas divergem exponencialmente. Esta é a denominada "sensibilidade às condições iniciais", que caracteriza o comportamento caótico de alguns sistemas não-lineares tornando-os imprevisíveis.

Assim, mesmo sistemas que possam ser modelados satisfatoriamente por equações deterministas, ou seja, sem ruídos ou incertezas explícitas, podem evoluir de forma aparentemente aleatória e irregular. Na presença de caos, a própria incerteza nas condições iniciais associada à precisão finita de qualquer medição impede prever a evolução futura. Portanto, a identificação dos regimes caóticos da dinâmica e a quantificação do grau de caoticidade são essenciais para estabelecer os limites dentro dos quais é possível efetuar predições [2-5]. Dentre as aplicações da teoria do caos destacam-se o controle do caos e a sincronização de sistemas acoplados.

Objetivos

Compreender os conceitos básicos do caos determinista, estudando modelos simples, de tempo discreto. Aplicar essas idéias para pesquisar sistemas realistas, a exemplo de circuitos elétricos com elementos não-lineares. O projeto visa também, como extensões futuras, aplicações de interesse prático, tais como a sincronização e o controle de caos ou a criptografia para comunicações seguras [6].

Metodologia

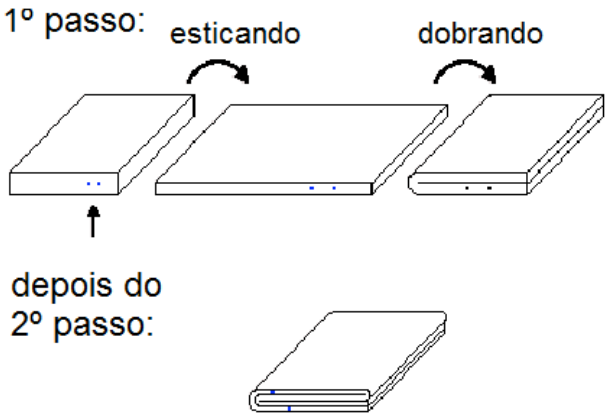
As complicações matemáticas dos sistemas não-lineares fazem com que o uso de técnicas computacionais sejam valiosas, tanto para efetuar simulações ou evoluir numericamente as equações de movimento, quanto para visualizar os resultados.

Paradigmas matematicamente simples, a exemplo do mapa logístico, são apropriados para investigar o conceito de caos. O mapa logístico, $X_{n+1} = \mu\ X_n\ (1- X_n)$, com $\mu \in [0,4]$ e $x_0 \in [0,1]$, foi originalmente introduzido como um modelo para sistemas ecológicos. Para cada valor de μ, as trajetórias são construídas numericamente iterando-se o mapa, a partir da condição inicial x_0.

A divergência exponencial das condições iniciais (medida pelos expoentes de Lyapunov) e aspectos fractais do mapa podem ser estudados numericamente usando programas de computador (e.g., Excel) que permitem efetuar cálculos numéricos e gerar gráficos. A relativa simplicidade do mapa logístico permite ainda complementar os resultados numéricos com cálculos analíticos.

Desenvolvimento:

A Dinâmica do Padeiro exemplifica bem o conceito de caos. No processo de fazer pão, a massa é esticada e dobrada diversas vezes. Nesse processo, pontos inicialmente próximos vão se afastando com o tempo, como pode ser visto na figura abaixo.



Primeiramente foi estudado o comportamento de sistemas dinâmicos simples, como os sistemas $X_{n+1} = \sqrt{X_n}$ e $X_{n+1} = X_n^2$. Através do estudo destes sistemas foram introduzidos o conceito de ponto fixo estável e ponto fixo instável.

Ponto fixo é aquele que uma vez introduzido na recursão não se altera, ou seja, se um ponto fixo é escolhido como condição inicial o sistema permanece constante e igual à condição inicial. Escolher pontos bem próximos de um ponto fixo nos ajuda a caracterizar este em ponto fixo estável ou instável. Para que o ponto seja definido como estável é necessário que ao ocorrerem as iterações, o ponto antes bem próximo do ponto fixo se aproxime cada vez mais até coincidir com ele. O contrário acontece com o ponto fixo instável, pontos bem próximos após algumas interações se distanciam cada vez mais do ponto inicial.

Através das tabelas abaixo, podemos perceber que no primeiro sistema ($X_{n+1} = \sqrt{X_n}$) o ponto 1 é um ponto estável e o ponto 0 é um ponto instável e, o inverso ocorre no segundo sistema ($X_{n+1} = X_n^2$).

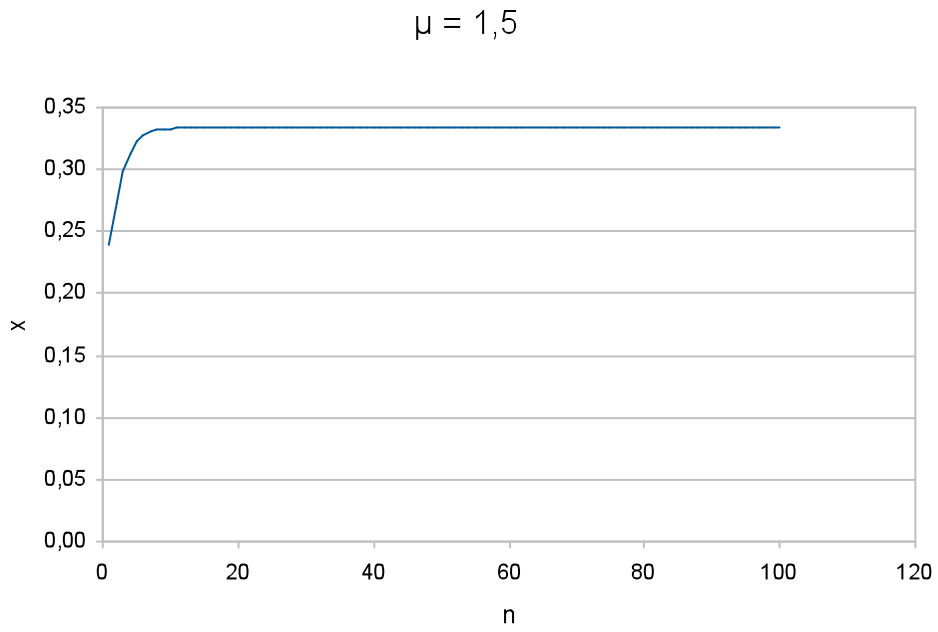
$$X_{n+1} = \sqrt{X_n}$$

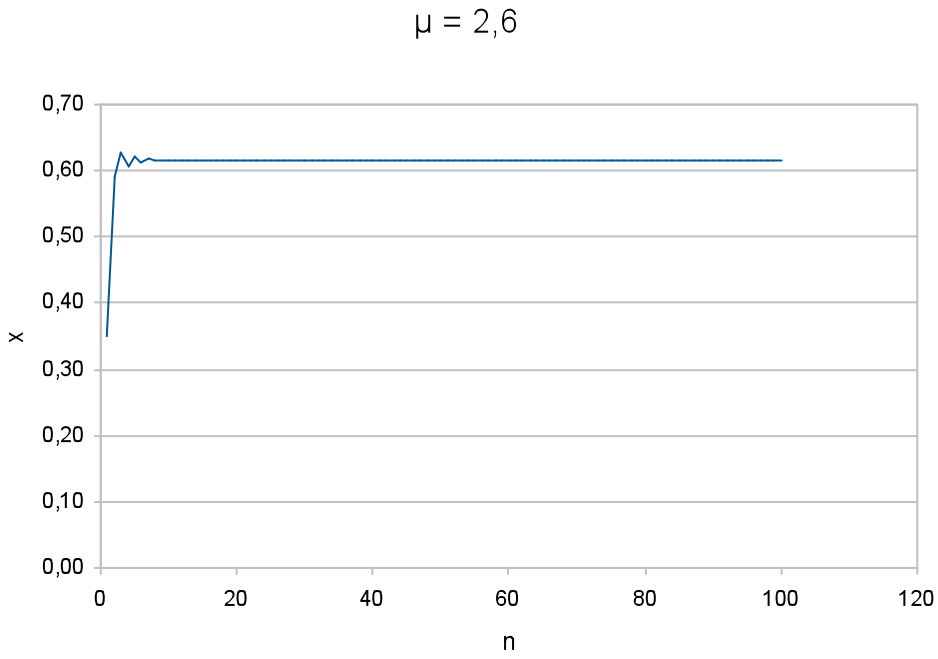
	$X_{0,1}$	$X_{0,2}$	$X_{0,3}$	$X_{0,4}$	$X_{0,5}$	$X_{0,6}$
X_1	9,0000	164,000	0,9800	0,0010	1,000	0,000
X_2	3,0000	12,8062	0,9899	0,0316	1,000	0,000
X_3	1,7321	3,5786	0,9950	0,1778	1,000	0,000
X_4	1,3161	1,8917	0,9975	0,4217	1,000	0,000
X_5	1,1472	1,3754	0,9987	0,6494	1,000	0,000
X_6	1,0711	1,1728	0,9994	0,8058	1,000	0,000
X_7	1,0349	1,0829	0,9997	0,8977	1,000	0,000
X_8	1,0173	1,0406	0,9998	0,9475	1,000	0,000
X_9	1,0086	1,0201	0,9999	0,9734	1,000	0,000
X_{10}	1,0043	1,0100	1,0000	0,9866	1,000	0,000
X_{11}	1,0021	1,0050	1,0000	0,9933	1,000	0,000
X_{12}	1,0011	1,0025	1,0000	0,9966	1,000	0,000
X_{13}	1,0005	1,0012	1,0000	0,9983	1,000	0,000
X_{14}	1,0003	1,0006	1,0000	0,9992	1,000	0,000
X_{15}	1,0001	1,0003	1,0000	0,9996	1,000	0,000

$$X_{n+1} = X_n^{\,2}$$

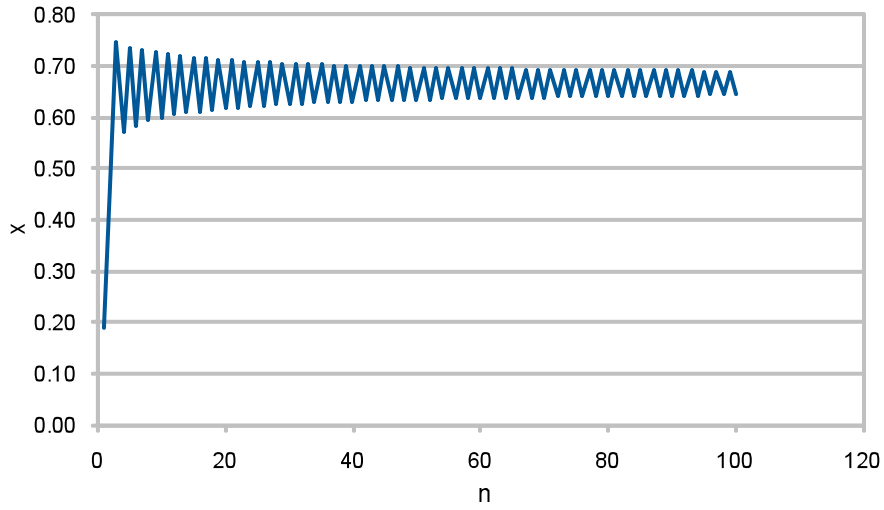
	$X_{0,1}$	$X_{0,2}$	$X_{0,3}$	$X_{0,4}$	$X_{0,5}$	$X_{0,6}$
X_1	2,000	1,1000	0,9900	0,1230	1,000	0,000
X_2	4,000	1,2100	0,9801	0,0151	1,000	0,000
X_3	16,000	1,4641	0,9606	0,0002	1,000	0,000
X_4	256,00	2,1436	0,9227	0,0000	1,000	0,000
X_5	65536	4,5950	0,8515	0,0000	1,000	0,000
X_6	$429496*10^4$	21,1138	0,7250	0,0000	1,000	0,000
X_7	1,84E+019	445,791	0,5256	0,0000	1,000	0,000
X_8	3,40E+038	198730,1	0,2763	0,0000	1,000	0,000
X_9	1,16E+077	...	0,0763	0,0000	1,000	0,000
X_{10}	1,34E+154	...	0,0058	0,0000	1,000	0,000
X_{11}	...	...	0,0000	0,0000	1,000	0,000

Para entender melhor o conceito de caos e o comportamento de um sistema caótico foi estudado um mapa logístico da forma: $X_{n+1} = \mu X_n (1-X_n)$. O valor do parâmetro μ foi alterado diversas vezes para que fosse possível se encontrar diferentes comportamentos da função, até ela alcançar o caos. Os gráficos abaixo nos mostram alguns dos valores de μ estudados:

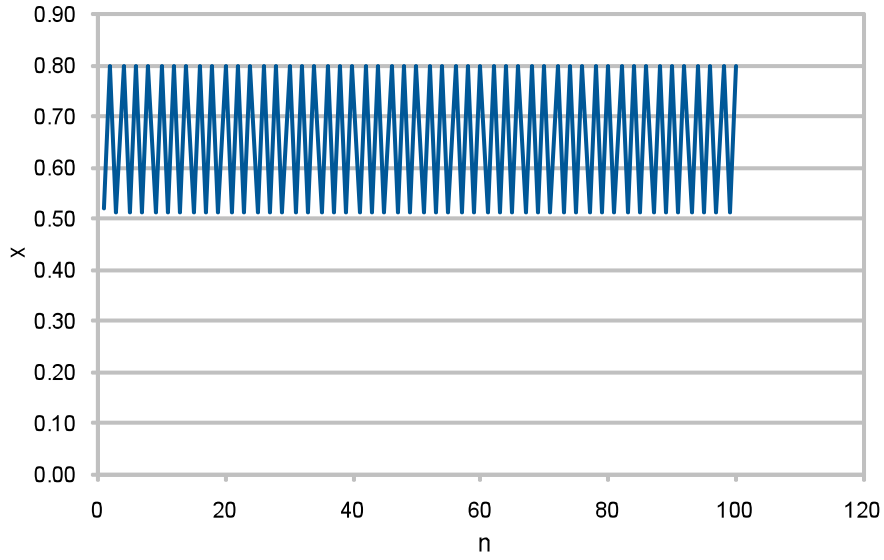




μ = 3,0

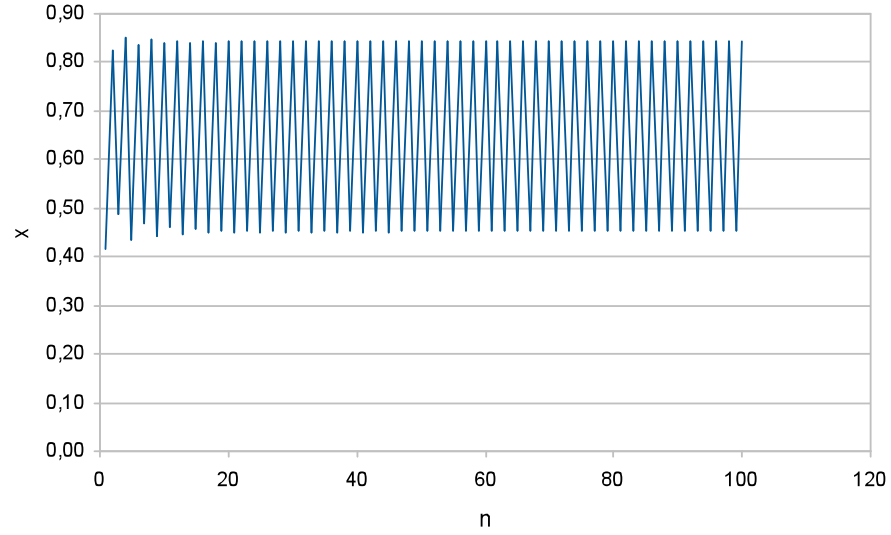

0.80
0.70
0.60
0.50
0.40
0.30
0.20
0.10
0.00
x
0
20
40
60
80
100
120
n

μ = 3,2

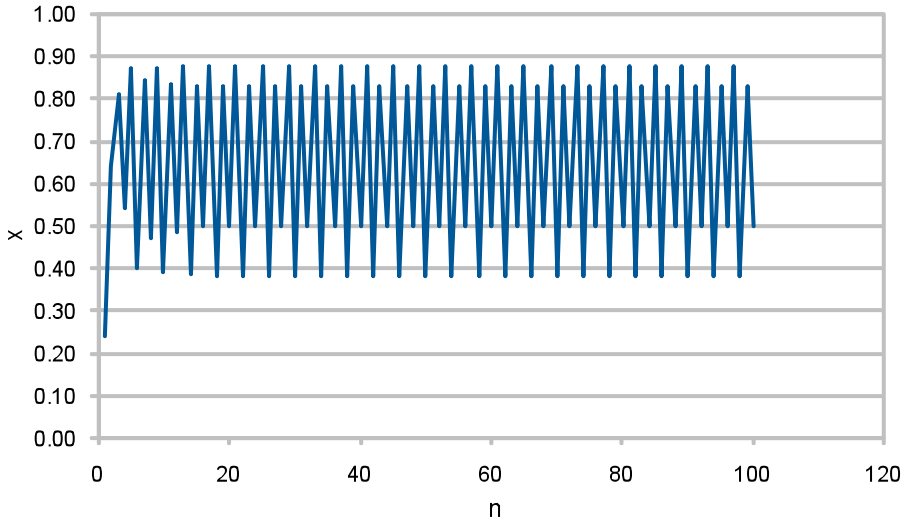

0.90
0.80
0.70
0.60
0.50
0.40
0.30
0.20
0.10
0.00
x
0
20
40
60
80
100
120
n

ε

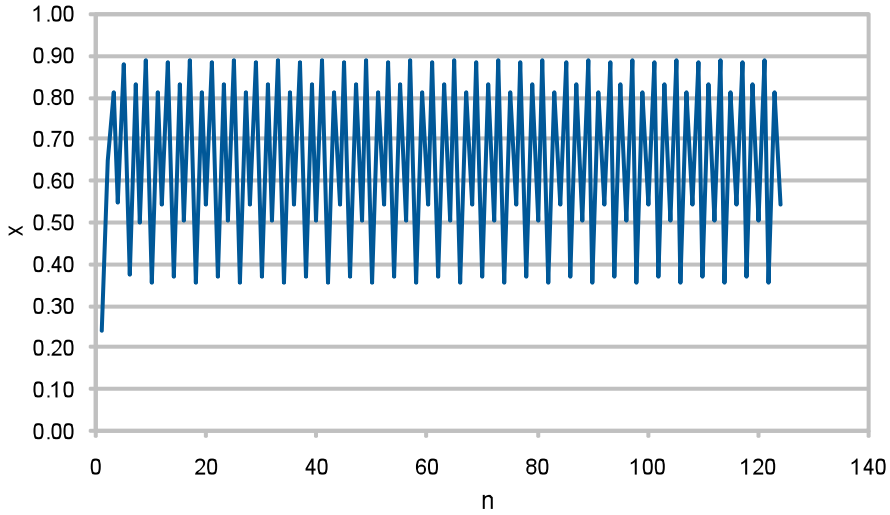
μ = 3,4


0,90
0,80
0,70
0,60
0,50
0,40
0,30
0,20
0,10
0,00
x
0
20
40
60
80
100
120
n

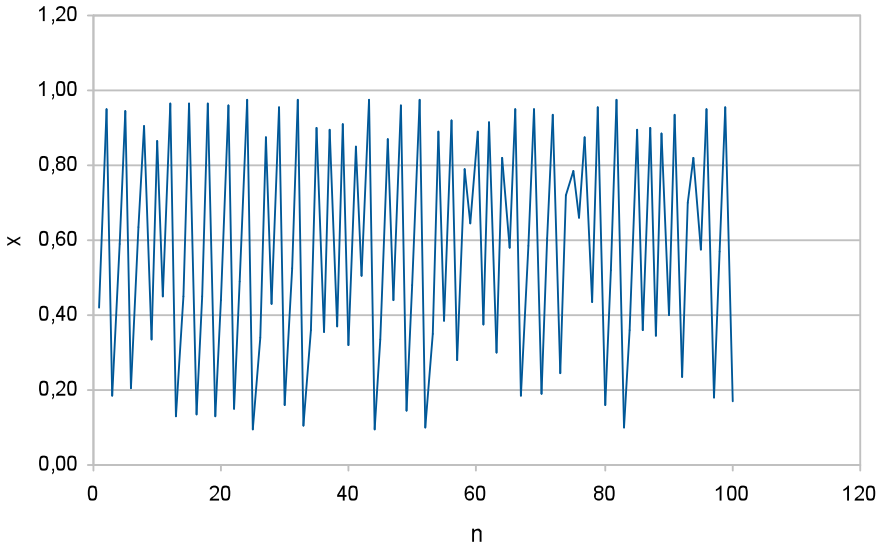
μ = 3,5

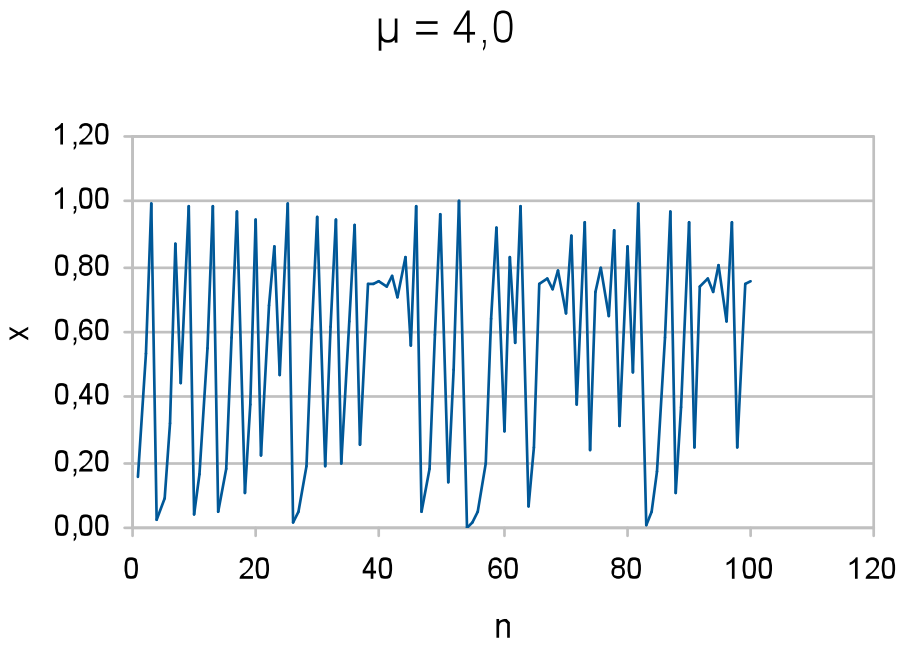

1.00
0.90
0.80
0.70
0.60
0.50
0.40
0.30
0.20
0.10
0.00
x
0
20
40
60
80
100
120
n

μ = 3,55

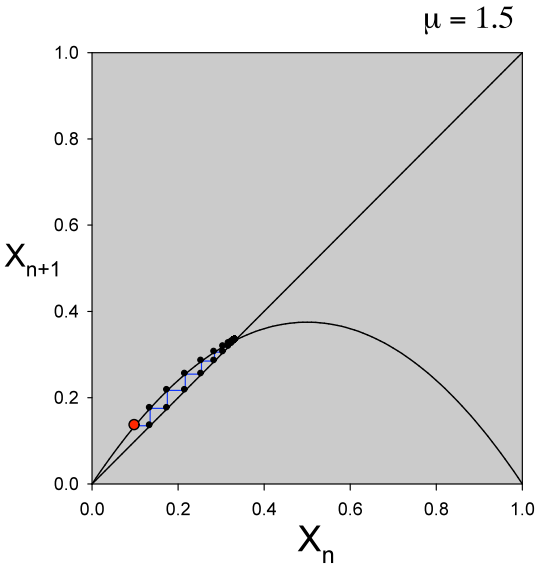

1.00
0.90
0.80
0.70
0.60
0.50
0.40
0.30
0.20
0.10
0.00
x
0
20
40
60
80
100
120
140
n

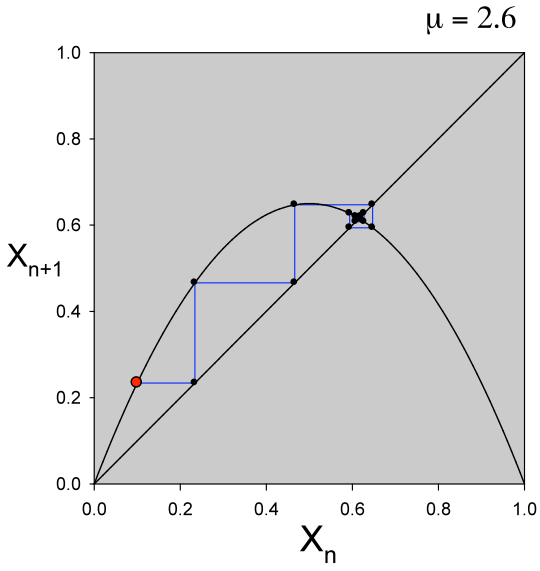
μ = 3,9


1,20
1,00
0,80
0,60
0,40
0,20
0,00
x
0
20
40
60
80
100
120
n

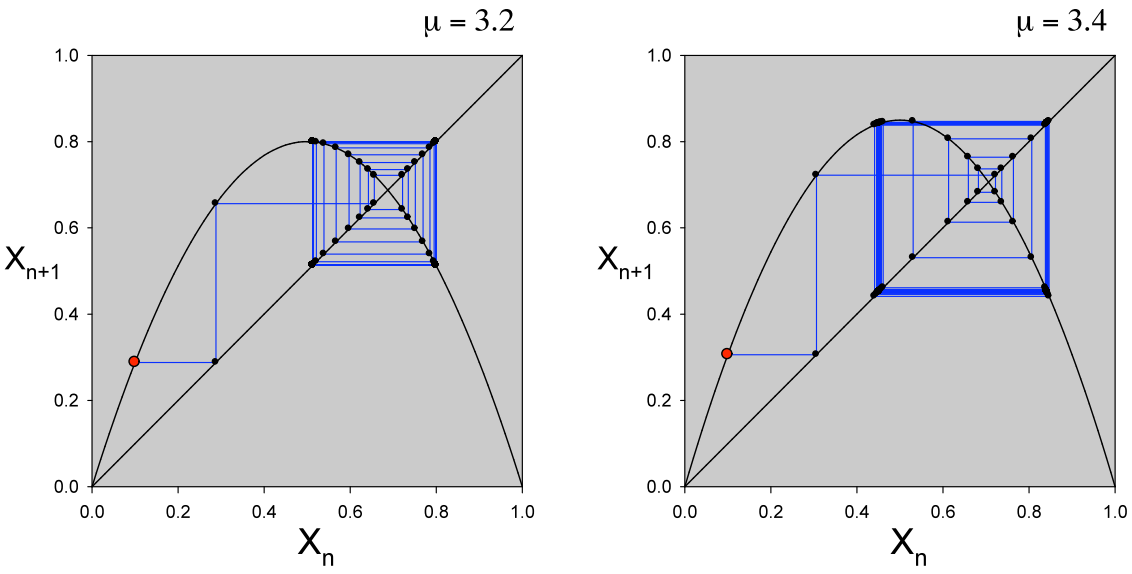


Analisando os gráficos, torna-se evidente o fato que o grau de irregularidade (caos) aumenta junto ao crescimento do valor de μ. Nos primeiros três gráficos (μ= 1,5; 2,6 e 3,0) a curva tende à um certo valor constante (ponto fixo), no primeiro gráfico (μ= 1,5) isso acontece suavemente e no terceiro (μ = 3,0) o processo é mais lento e oscilatório. Entretanto, em todos os casos podemos perceber que a função se estabilizará em algum ponto mesmo que para isso seja necessário um número bem grande de iterações. Logo, depois de muito tempo é possível determinar o ponto no qual o gráfico se estabilizará.

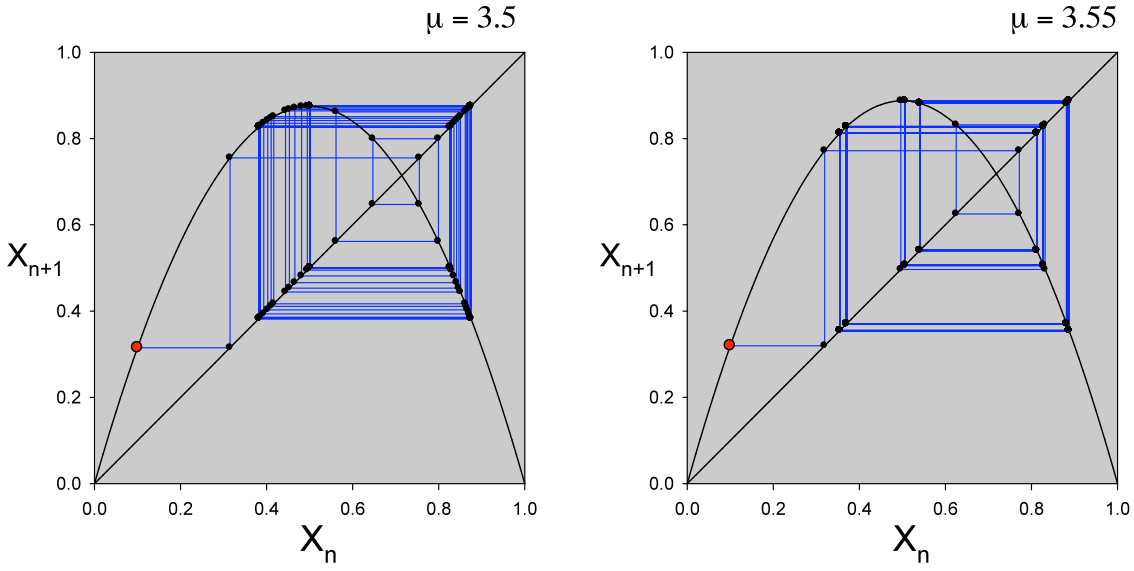


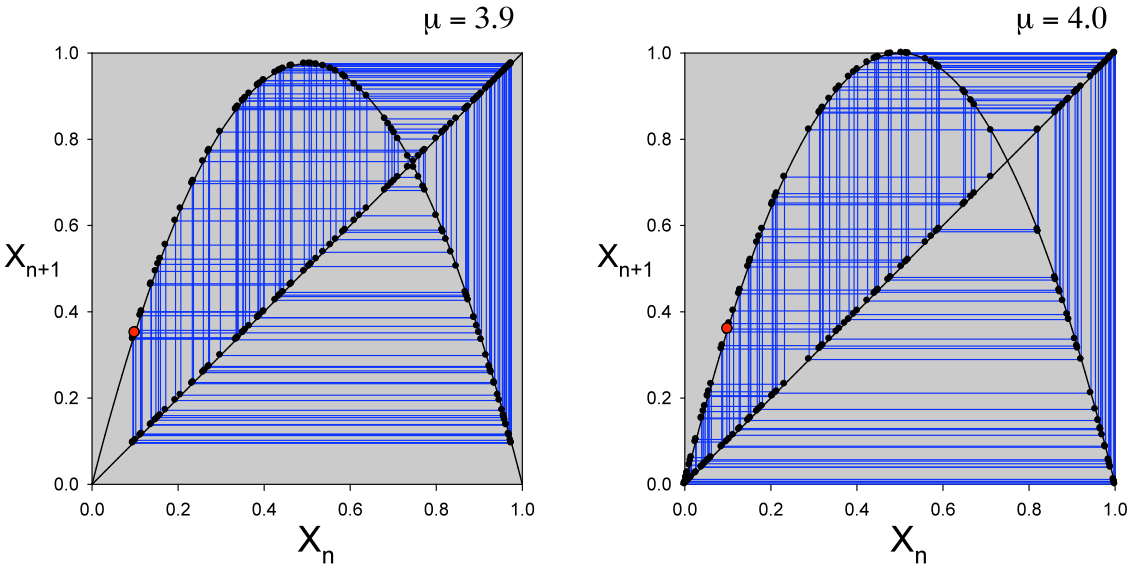


Ao contrário do gráfico para μ = 3,2 e 3,4, onde seus valores oscilam eternamente entre um número finito de valores (2 valores).

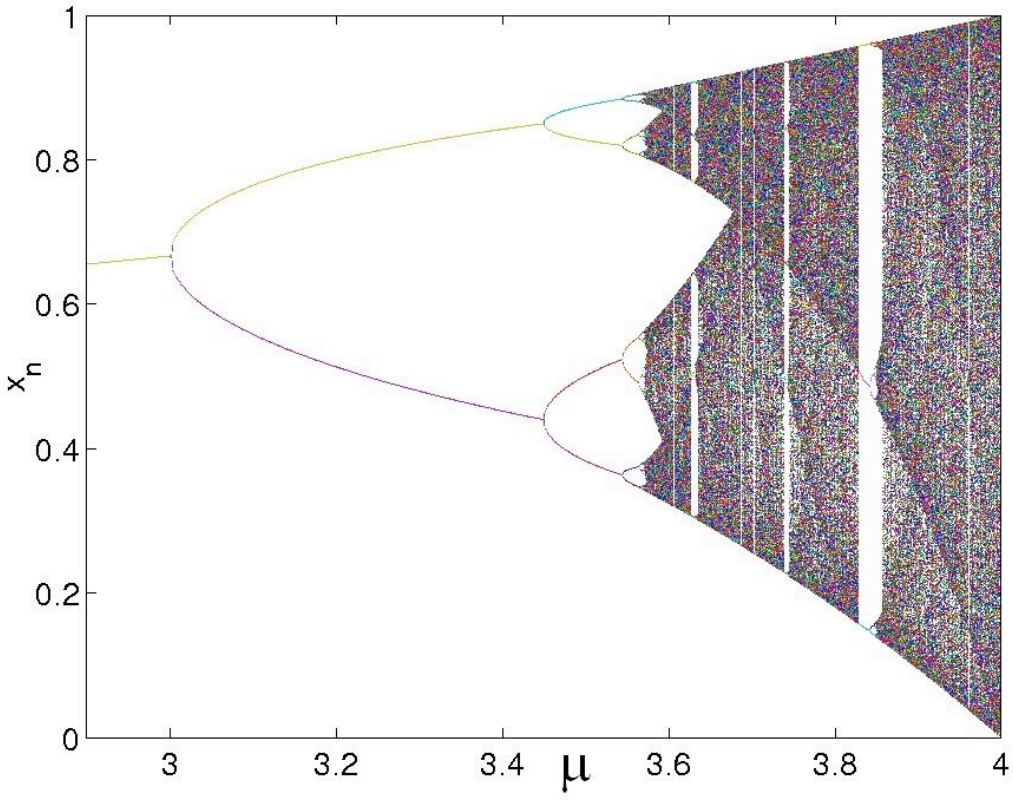


Aumentando μ, o número de valores das oscilações é duplicado (4 valores para μ =3.5, 8 valores para 3.55), até que o número de valores torna-se infinito (μ =3.9 e 4,0). Assim ocorre a aparição do caos por duplicação de período. Aumentando o valor do parâmetro μ, várias janelas com esta transição para o caos ocorrem. Os últimos gráficos (μ = 3,9 e 4,0) exibem casos em que o número de valores que a função alterna é infinito. Estes últimos gráficos exemplificam o caos uma vez que não podemos pré-determinar um valor para o qual a função se aproximará depois de um número finito ou até infinito de vezes.





Na figura abaixo é mostrado o diagrama de bifurcações (extraído de http://www-rohan.sdsu.edu/~rcarrete/teaching/M-538/lectures/codes/1D_map/pics/logistic_bif.jpg)
Neste diagrama podem ser observadas as diferentes janelas de bifurcações para o caos.



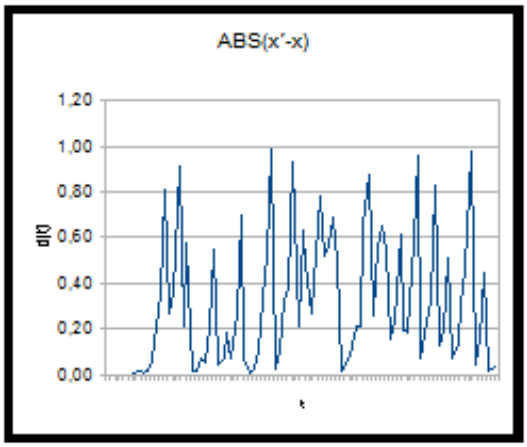
A não-linearidade deste sistemas dificulta a determinação do seu estado ao longo prazo. Em sistemas caóticos percebemos também que as condições iniciais dadas a um mesmo mapa logístico, por exemplo, alteram o resultado final. Estudando duas trajetórias de um sistema caótico preparado em condições iniciais muito próximas, é possível perceber que depois de um número finito de iterações, as seqüências se distanciam inicialmente muito rápido. E, não importa o quão próximo pegarmos as condições iniciais, suas funções se distanciarão exponencialmente rápido. Este fato torna o sistema imprevisível. Portanto, o caos é uma característica de um grupo de trajetórias.

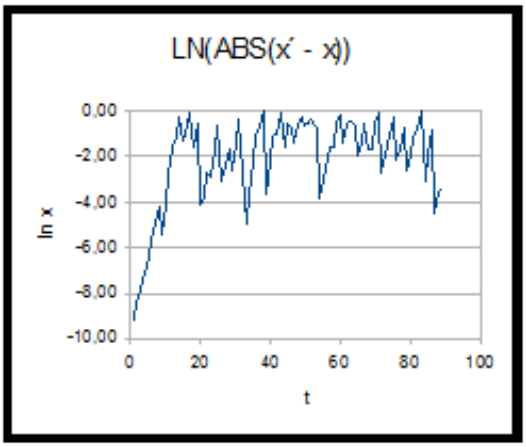
Pensando nisso, o russo Alexander M. Lyapunov (1857 – 1918) desenvolveu um método de medida do afastamento de uma função de dois pontos iniciais considerando que a taxa de distanciamento entre eles seja exponencial. Ou seja, o expoente de Lyapunov determina o grau de caos que um determinado sistema dinâmico possui.

Para estudar este fato foram feitos diversos gráficos que relacionavam as distâncias dos pontos ao longo do tempo. Apesar de algumas irregularidades é possível perceber que os gráficos que relacionam a diferença dos pontos com seus logaritmos são mais regulares e por isso mais fáceis de se estudar.

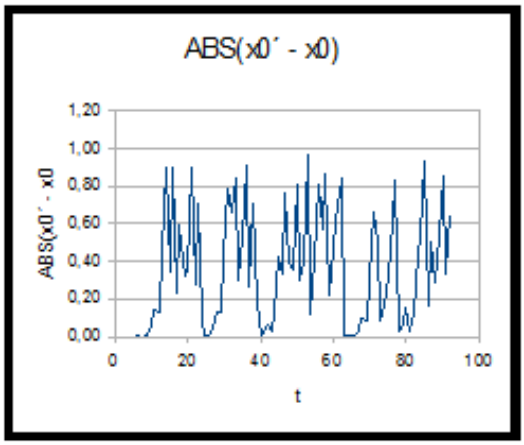
Todos os gráficos abaixo foram estudados sobre o mesmo mapa logístico onde μ é igual a 4,0. As condições iniciais, entretanto, foram alteradas para que pudéssemos analisar pares de trajetórias inicialmente próximas.

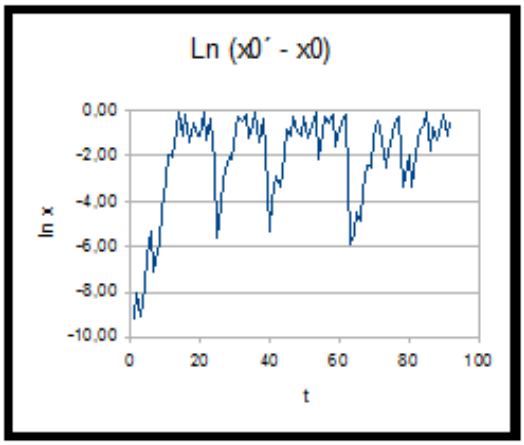
1º teste: para $x_0 = 0{,}762482$ e $x_0' = 0{,}762582$



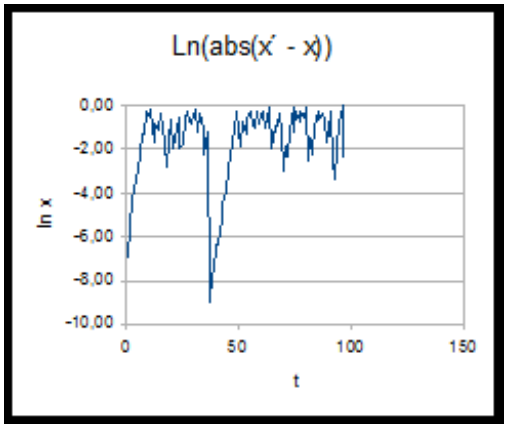


2º teste: para $x_0 = 0{,}12991382$ e $x_0' = 0{,}3001382$





3º teste: para $x_0 = 0{,}98788540$ e $x_0' = 0{,}98688540$



Observamos que, a pesar de que para tempos longos a discrepância entre as trajetórias satura, para tempos curtos o seu crescimento é exponencial. Determinando a inclinação do trecho aproximadamente linear, obtemos o valor do expoente de Lyapunov, que nestes casos é próximo de ln2.

A diferença entre dois pontos pode ser dada como:

$$d_n = |f^{(n)}(x_0+\varepsilon) - f^{(n)}(x_0)| \ .$$

Se o sistema for caótico, esperamos que a distância cresça exponencialmente com o n, então dizemos:

$$\frac{d_n}{\varepsilon} = \frac{|f^{(n)}(x_0+\varepsilon) - f^{(n)}(x_0)|}{\varepsilon} = e^{\lambda n}$$

onde λ é o expoente de Lyapunov.

O expoente de Lyapunov é dado pela inclinação do gráfico logarítmico. Portanto, quanto mais negativo for seu valor, mas rápido ele converge para os valores finais e, quando o expoente é positivo, o sistema apresenta comportamento caótico.

Por último consideramos possíveis aplicações dos conceitos estudados. Existem duas aplicações básicas: controle de caos e sincronização. A primeira refere-se a variação de algum parâmetro de controle que permita, aproveitando da sensibilidade às condições iniciais, levar rapidamente o sistema de um estado a outro, ou evitar que a dinâmica evolua para uma região inapropriada do espaço de estados possíveis. No caso da sincronização são necessários vários sistemas acoplados. Existem muitas aplicações em que é importante que, mesmo que cada um dos elementos evolua caoticamente, a maioria execute a mesma dinâmica. Essa coerência pode levar a uma maior potencia, por exemplo, em circuitos eletrônicos ou lasers.

Por exemplo, sejam dois sistemas caóticos idênticos (com a mesma função f)

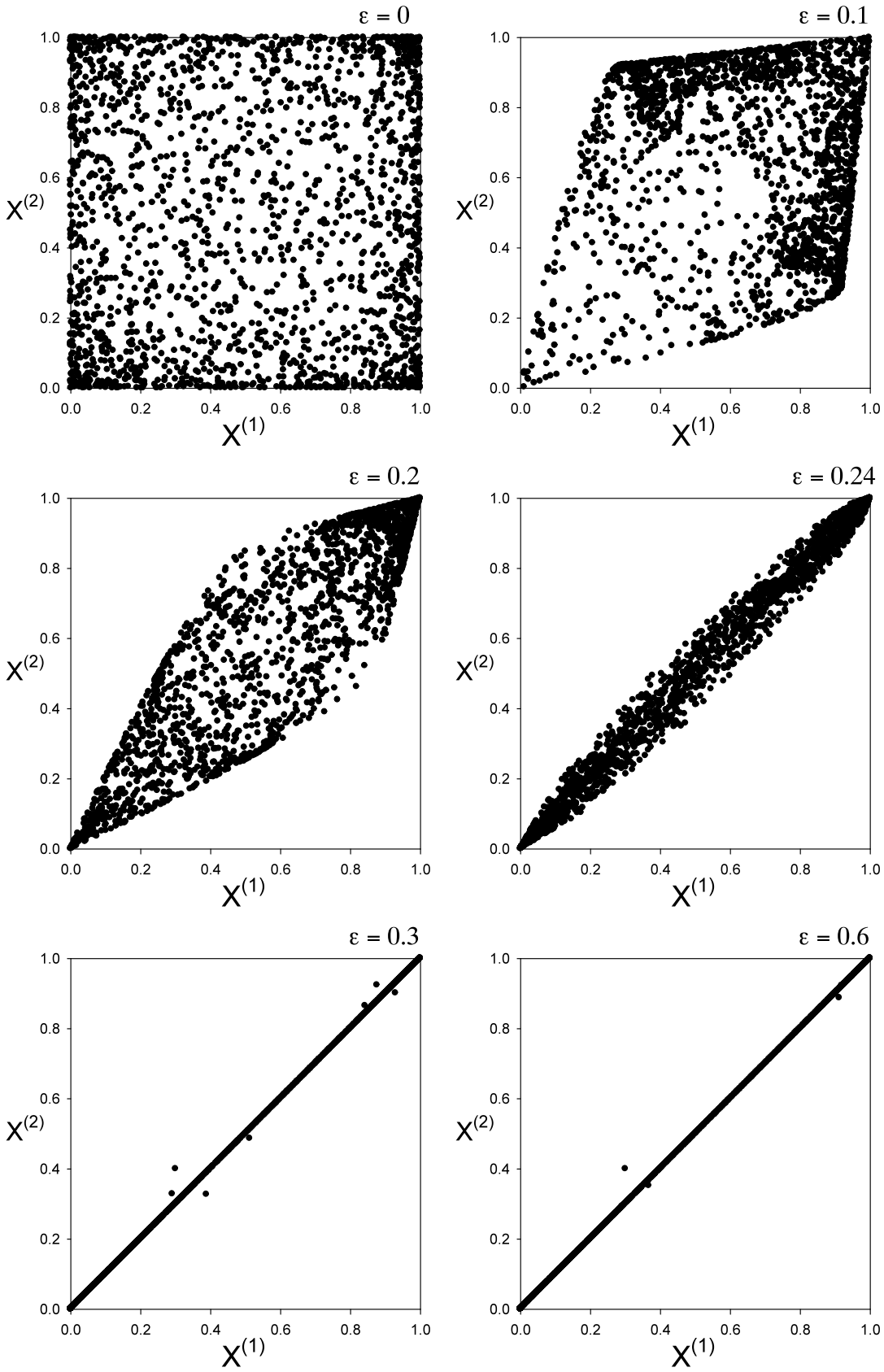
$$X^{(1)}_{n+1} = f(X^{(1)}_n)$$
$$X^{(2)}_{n+1} = f(X^{(2)}_n).$$

Se os valores iniciais são diferentes, $X^{(1)}_0 \neq X^{(2)}_0$, devido ao caráter caótico as trajetórias divergem exponencialmente com o tempo, porém se os sistemas fossem acoplados apropriadamente, suas evoluções podem se tornar idênticas.

Para o acoplamento simétrico, temos

$$X^{(1)}_{n+1} = f(X^{(1)}_n) + \varepsilon \, [\, f(X^{(2)}_n) - f(X^{(1)}_n) \,]$$
$$X^{(2)}_{n+1} = f(X^{(2)}_n) + \varepsilon \, [\, f(X^{(1)}_n) - f(X^{(2)}_n) \,]$$

o estado em que $X^{(1)} = X^{(2)}$ é uma solução possível. O importante é ver se esse estado é estável ou não. Para valores pequenos do acoplamento ε, os mapas permanecem desincronizados, entretanto, acima de um certo valor, eles sincronizam. Conforme varia ε, é possível perceber uma linearidade entre os pontos ou até uma dispersão no diagrama $X^{(1)}X^{(2)}$, como mostrado na figura abaixo. Quando os pontos ocupam a diagonal, o estado sincronizado é alcançado.


ε = 0
ε = 0.1
ε = 0.2
ε = 0.24
ε = 0.3
ε = 0.6
X(1)
X(2)
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

A estabilidade pode ser estudada conhecendo os expoentes de Lyapunov (dois neste caso). Um deles correspondendo à direção ao longo da diagonal (estado sincronizado) é positivo para mapas caóticos. O segundo, transversal ao estado sincronizado, sendo positivo, a direção perpendicular também apresenta caos. Porém se o expoente transversal é negativo, o estado sincronizado é estável e o sistema sincroniza. No caso estudado

$$\lambda_{\perp} = \ln|1-2\varepsilon| + \lambda_{\parallel}.$$

Sendo $\lambda_{\parallel} = \ln 2$, então o valor critico de ε para o qual $\lambda_{\perp}=0$ é $\varepsilon_c = 1/4$. Com efeito, na figura acima observamos que quando ε se aproxima desse valor, a evolução tende a ocupar a diagonal (estado sincronizado). Para $\varepsilon \geq \varepsilon_c$, os mapas sincronizam.

Logo, dependendo da forma como os mapas interagem, temos diferentes comportamentos para o conjunto. As componentes podem se aproximar e se afastar conforme é alterado o coeficiente de acoplamento entre os mapas.

Foram analisados sistemas de duas dimensões neste estudo. Para o caso de sistemas simétricos em d dimensões os conceitos básicos são os mesmos. O segundo expoente de Lyapunov permite determinar o valor do coeficiente de acoplamento ε entre os mapas que satisfaça a condição de sincronização. Conforme se varia ε, é possível perceber uma linearidade entre os pontos ou até uma dispersão no diagrama $X^{(1)}X^{(2)}$. Quando os pontos ocupam a diagonal, o estado sincronizado é alcançado.

Conclusões

O estudo do mapa logístico permitiu a compreensão das características básicas do comportamento caótico: forte sensibilidade às condições iniciais, aspectos fractais e repetição de operações de estica e dobra do espaço de fase como mecanismo dinâmico para gerar caos.

Ao longo do desenvolvimento do projeto de iniciação científica foram estudados diversos mapas. Através dos gráficos e tabelas pudemos perceber a dependência dos sistemas das condições iniciais e seus comportamentos ao decorrer do tempo. Para determinar o grau de caoticidade de um sistema foi calculado e analisado o conceito do expoente de Lyapunov. Expoentes negativos são característicos de estabilidade, entretanto, expoentes positivos indicam instabilidade, caos. Para diversos valores do parâmetro μ estudamos a cascata de bifurcações que leva ao caos e obtivemos o grau de caoticidade mediante o cálculo numérico do expoente de Lyapunov, a taxa de crescimento exponencial da distância entre trajetórias próximas. Observamos também o surgimento de caos por duplicação de período, em analogia ao fenômeno já estudado no mapa logístico.

Por último foi estudado o acoplamento entre mapas caóticos e sua possível sincronização. Mapas em d-dimensões possuem d expoentes de Lyapunov. Da análise desses expoentes é possível determinar o valor crítico do coeficiente de acoplamento ε entre os mapas para que o estado sincronizado possa ocorrer.

Agradecimentos:

Gostaria de agradecer ao CNPQ e a minha professora, Celia Anteneodo, pela oportunidade de estudar um assunto tão interessante como o Caos e, que se não fosse por esta oportunidade, acredito que jamais veria tal assunto em minha graduação.

Referências

1 – LASKAR, J, A numerical experiment on the chaotic behaviour of the Solar System, **Nature**, v. 338, p237–238. 1989.

2 - NUSSENZVEIG, H.M. (org.). **Complexidade e caos**. Ed. UFRJ/COPEA, 1999.

3 - FIEDLER-FERRARA, N. PRADO, C.P.C. **Caos uma introdução**. Ed. E. Blücher, 1994.

4 - LAM, L. **Nonlinear physics for beginners**. World Scientific, 1990.

5 - HILBORN, R.C. **Chaos and nonlinear dynamics**. Ed. Oxford University Press. 1994.

6 - BAPTISTA, M. S. Cryptography with chaos. **Phys. Lett. A**, v. 240, n.1-2, p50-54. 1998.

7 – PIKOVSKY, A, ROSEMBLUM, M., KURTHS, J. **Synchronization**. Ed.Cambridge U. Press, 2003.