PRINCÍPIOS DE GEOMETRIA PROJETIVA COM APLICAÇÕES EM VISÃO COMPUTACIONAL

Aluno: André Phillip Franco
Orientador: Marcos Craizer

Introdução

A Geometria Projetiva surgiu com a dificuldade que os artistas do Renascimento encontravam em dar aos quadros que pintavam uma forma real dos objetos, de modo que qualquer pessoa identificasse sem dificuldades o que estava longe e o que estava perto. Motivados pelo desafio, eles estudaram as leis que determinam a construção dessas projeções criando a teoria fundamental da perspectiva geométrica, que depois foi expandida por um grupo de matemáticos franceses liderados por Gérard Desargues[1].

Já a Geometria Computacional é o ramo da ciência da computação que estuda as técnicas e algoritmos para resolução computacional de problemas geométricos. Emergiu em meados de 1970, quando houve um grande progresso da computação gráfica e robótica, para as quais é essencial resolver problemas geométricos de forma eficiente, isto é, utilizando o menor número possível de operações simples sobre os elementos geométricos.

Em conjunto, as duas disciplinas contribuem para melhoria de inúmeras aplicações em diferentes áreas como Processamento de Imagens, Visão Computacional, Sistemas de Informações Geográfica (SIGs), entre outras.

Atualmente, um desafio para pesquisadores da área envolve a criação de um algoritmo computacional que consiga avaliar os objetos geométricos de forma que o seu reconhecimento não dependa do ponto de vista do usuário. Isto significa criar um algoritmo que reconhça uma pessoa de costas através de uma foto tirada de frente.

Objetivos

Estudar os fundamentos básicos da geometria projetiva, sua representação e manipulação no computador através do desenvolvimento de um algoritmo computacional em C que permita uma maior compreensão visual do tratamento dos elementos geométricos sobre a ótica projetiva.

Conceitos Básicos

Ao trabalhar com geometria computacional enfrentamos algumas desvantagens quando usamos coordenadas cartesianas. Se por um lado elas são bastantes conhecidas, por outro a manipulação de problemas que exigem o conceito de pontos no infinito tornam-se difíceis, o que nos obriga a tratar separadamente muitos casos particulares. Por esse motivo, é mais conveniente trabalhar com coordenadas homogêneas, uma representação mais sofisticada.

Basicamente, temos que se (X, Y) são coordenadas cartesianas de um ponto, suas coordenadas homogêneas são uma tripla de números reais $[w, x, y]$ tais que $X = x/w$ e

---

1 Gérard Desargues, 1591–1661, Matemático, engenheiro militar e arquiteto francês de Lyon, considerado um dos fundadores da moderna geometria com sua conceituação de Geometria Projetiva. Mudou-se para Paris onde entrou para o círculo dos mais importantes matemáticos de sua era. Desargues publicou um tratado original sobre seções cônicas, aproveitando idéias de projeção, mas esse trabalho foi ignorado eesquecido pelos matemáticos da época e todas as publicações desapareceram. De pouco sucesso como autor matemático, hoje é reconhecido mundialmente pela importância de seus estudos.

Y = y/w . Onde *w* é chamado de *peso*. Quando temos uma tripla cujo peso é zero, temos um ponto no infinito.

Em coordenadas homogêneas uma reta é definid por três coeficientes homogêneos representados por ⟨*W, X,Y*⟩, onde *p = [w, x, y]* pertence a reta se $W \cdot w + X \cdot x + Y \cdot y = 0$. Outro conceito importante trata do sentido do vetor, isto é, dizemos que as triplas [w, x, y] e [−w, −x, −y] não são pontos iguais[2] , mas um é o *antipodal* do outro, isto é, [w, x, y] = ¬ [−w, −x, −y]. Assim, introduzimos os conceitos de *Além* (quando w > 0) e *Aquém* (w < 0)[1]. Com isso, podemos definir duas premissas:

- Dois pontos não antipodais determinam uma reta no Aquém e outra no Além.

- Dualmente, retas não antipodais se interceptam em dois pontos antipodais. No caso de retas paralelas, esses pontos estarão no infinito.

O Modelo Esférico

Ao usarmos coordenadas homogêneas estamos tratando de um conjunto de pontos do espaço T denominado *Plano Projetivo Orientado*. Ele é representado por todas as triplas de números reais [w, x, y], exceto a tripla [0, 0, 0] (imprópria).

Geometricamente, podemos visualizar o espaço T através do seu Modelo Esférico, que consiste em uma esfera unitária centrada na origem, onde seu hemisfério w > 0 é o Aquém, o hemisfério w < 0 é o Além, para o círculo em w = 0 temos o Infinito e uma reta corresponde a um círculo unitário que passa pela origem.

Um ponto p = [w,x,y] em coordenadas homogêneas é representado no espaço T pela projeção do ponto (x,y,w) em coordenadas cartesianas sobre a esfera. Em Geometria Projetiva Orientada pontos são semi-retas que partem da origem:

$$p = \frac{(x, y, w)}{\sqrt{x^2 + y^2 + w^2}}$$

O Programa

Implementado em C, utilizando as bibliotecas do OpenGL para gráficos e GLUI para interface, o *Programa de Visualização Geométrica no Plano Projetivo Orientado* constitui-se em uma plataforma que possibilita a visualização de cônicas, cálculo de intercessões, colinearidade e outros, visando o entendimento dos fundamentos da geometria projetiva.

Ao iniciar o programa, é aberta uma tela inicial onde aparecem os comandos básicos (zoom, luzes, etc.) e uma esfera unitária representando o Modelo Esférico.

Em um menu de opções, encontram-se dez programas diferentes. Uma vez selecionada a opção desejada, uma janela auxiliar é aberta onde o usuário digita os dados de entrada. Da mesma forma, são exibidas as saídas numérica e escrita em uma outra janela auxiliar, enquanto o desenho referente é esboçado na tela.

A seguir, são listadas as opções e suas respectivas explicações.

2 De fato, em Geometria Projetiva considera-se que [w, x, y] e [−w, −x, −y] são pontos iguais. Porém, neste projeto trabalharemos com a Geometria Projetiva Orientada, onde usamos os conceitos de *Aquém* e *Além*. Assim, [w, x, y] = ¬ [−w, −x, −y].

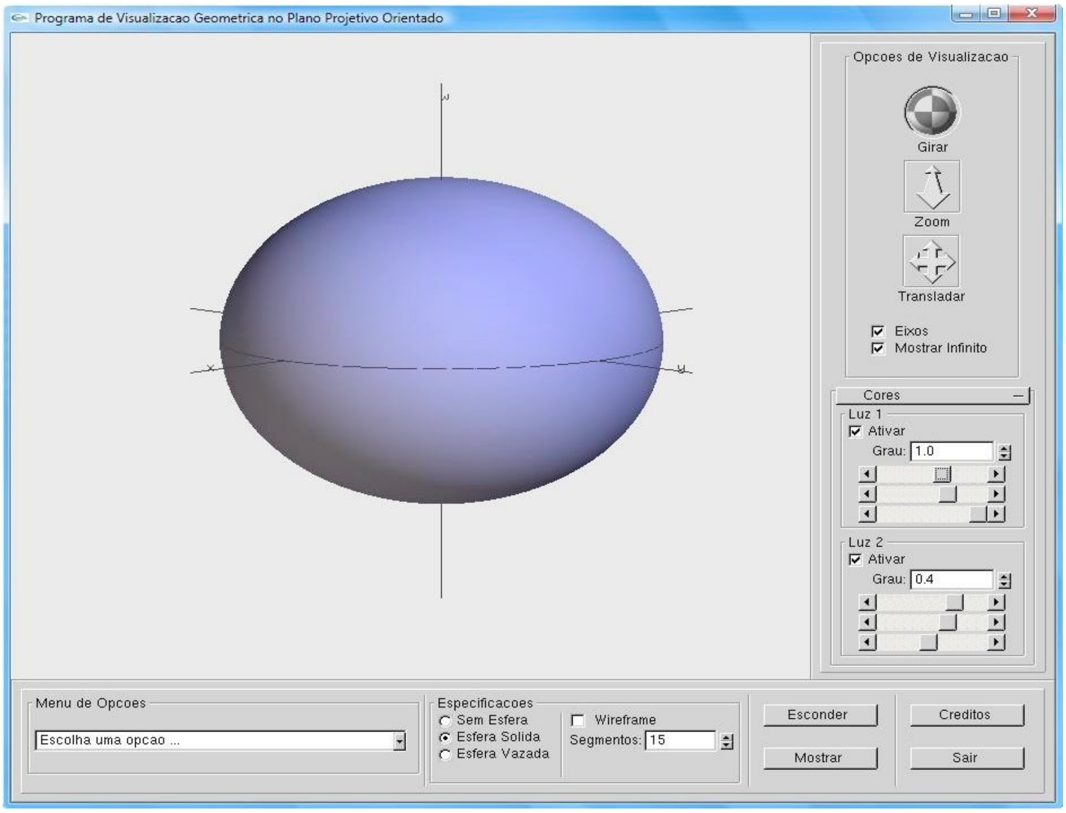

Figura 1 – O Programa de Visualização Geométrica no Plano Projetivo Orientado

Opção 1 – Verificar se um ponto *p* pertence a reta *r*

Ao selecionar a primeira opção do programa, uma janela auxiliar é aberta à direita da tela principal. O usuário digita os coeficientes da reta e em seguida as coordenadas homogêneas do ponto que ele deseja avaliar. Ao clicar no botão *Verificar* o programa exibe a resposta na janela de saída e ao marcar o Checkbox *Desenha Reta / Ponto*, é possível visualizar no Modelo Esférico a reta e o ponto digitados.

Para verificar se o ponto pertence a reta, usamos:

$$W \cdot w + X \cdot x + Y \cdot y = 0.$$

Para o esboço da reta, tanto nesta opção quanto em qualquer outra neste programa, inicialmente normalizamos os vetores $v1 = \langle -X, W, 0 \rangle$ e $v2 = \langle -Y, 0, W \rangle$ com os coeficientes digitados e calculamos o ângulo entre eles, onde:

$$\theta = \arccos\left(\frac{(-X, W, 0)}{\sqrt{X^2+W^2}} \cdot \frac{(-Y, 0, W)}{\sqrt{Y^2+W^2}}\right)$$

Em seguida, usando o comando *glVertex3f* da biblioteca gráfica OpenGL, plotamos ponto a ponto, variando t de 0 a 2π:

$$\left[\cos(t) - \sin(t) \cdot \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \cdot \frac{W}{\sqrt{X^2+W^2}}, \cos(t) + \frac{\sin(t)}{\sin(\theta)} \cdot \frac{W}{\sqrt{Y^2+W^2}}, \cos(t) - \sin(t) \cdot \frac{X}{\sqrt{X^2+W^2}} - \frac{\sin(t)}{\sin(\theta)} \cdot \frac{Y}{\sqrt{Y^2+W^2}}\right]$$

Opção 2 – Obter os pontos no infinito da reta ⟨W,X,Y⟩

Apesar de simples, a operação para obter os pontos no infinito de uma reta é muito importante. Este novo conceito nos permite saber com menos esforço se duas ou mais retas são paralelas, o que é bastante útil em casos de retas quase paralelas.

Nesta opção do programa, o usuário entra com os coeficientes da reta que deseja obter os pontos no infinito. Os pontos são impressos na janela de saída ao pressionar *Obter os pontos no infinito*.

Ao selecionar o Checkbox *Desenha Pontos* é possível visualizar os dois pontos no Modelo Esférico. (Dica: Habilite o Checkbox *Mostrar Infinito* e troque a opção no Radio Button para *Sem Esfera*.)

Lembrando que os pontos no infinito são dados pelas triplas cujo peso w = 0, temos que os dois pontos no infinito da reta $\langle W,X,Y\rangle$, são respectivamente:

$$Ponto\,1 = [0, Y, -X] \; e \; Ponto\,2 = [0, -Y, X]$$

Para plotar os dois pontos, inicialmente os normalizamos e em seguida usamos o comando *glVertex3f* da biblioteca gráfica OpenGL.

Opção 3 – Verificar se duas retas são paralelas

Diferente da geometria euclidiana clássica, onde duas retas paralelas nunca se encontram, na geometria projetiva o conceito de *infinito* nos permite afirmar que esta propriedade não é mais válida. Isto é, duas retas paralelas se encontram no infinito, em dois pontos distintos.

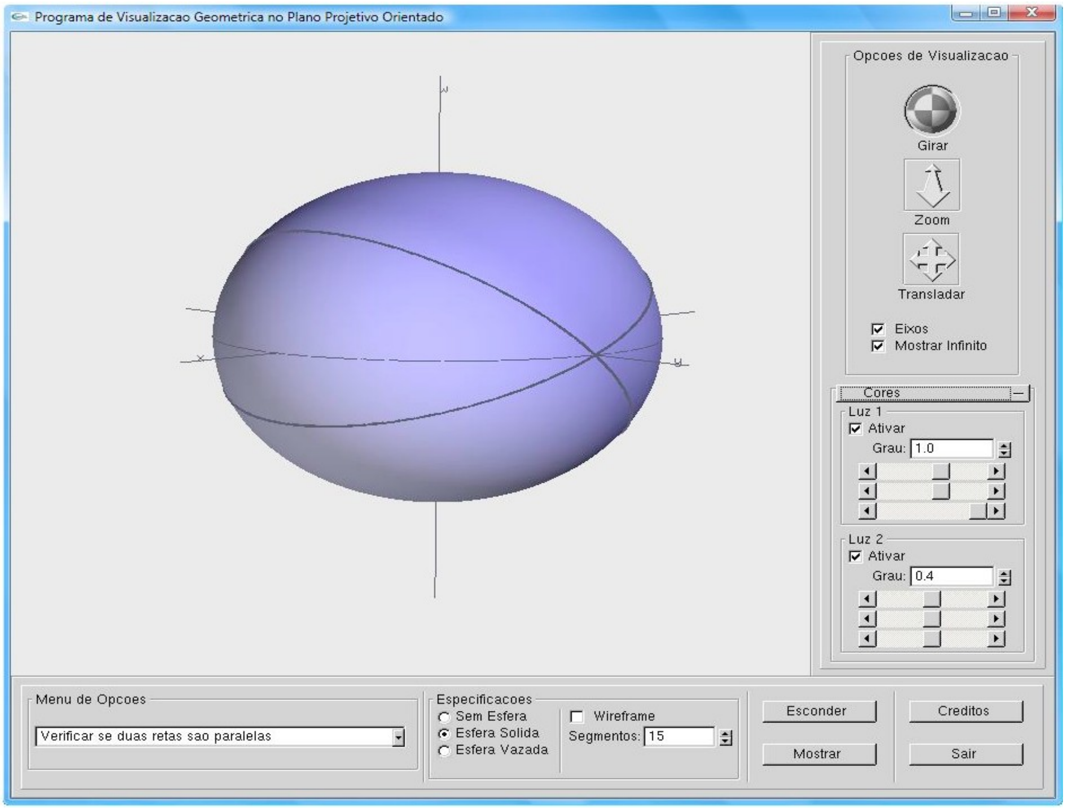

Figura 2 – Duas retas paralelas no Modelo Esférico.

Usando o algoritmo da segunda opção do programa, encontramos os dois pontos no infinito das duas retas digitadas pelo usuário. Se ambos os pontos no infinito de uma das retas forem iguais aos pontos no infinito da outra, dizemos que estas retas são paralelas. Caso contrário, temos duas retas não paralelas.

A resposta correspondente é impressa na janela de saída ao pressionar o botão *Verificar*. O usuário pode habilitar o Checkbox *Mostrar Infinito* e verificar visualmente que só as retas (círculos unitários no Modelo Esférico) paralelas se interceptam sobre a linha do infinito (w = 0).

Opção 4 – Obter o ponto que um segmento p0p1 corta uma reta m

Uma operação bastante útil em geometria computacional e geometria gráfica é determinar o ponto onde um segmento *p0p1* cruza uma determinada linha *m*.

Inicialmente verificamos se os pontos $p_0 = [w_0, x_0, y_0]$ e $p_1 = [w_1, x_1, y_1]$ digitados pelo usuário, estão ou não no mesmo lado da reta $m = \langle W, X, Y \rangle$. Para isto, avaliamos α_0 e α_1 [1]:

$$\alpha_0 = W \cdot w_0 + X \cdot x_0 + Y \cdot y_0$$
$$\alpha_1 = W \cdot w_1 + X \cdot x_1 + Y \cdot y_1$$

Onde o segmento *p0p1* só cruza a linha *m* se, e somente se, α_0 e α_1 têm sinais opostos ou um deles é nulo.

Quando o segmento *p0p1* cruza a linha *m*, o ponto de interseção é dado por:

$$p = \left[|\alpha_1| \cdot w_0 + |\alpha_0| \cdot w_1 ,\ |\alpha_1| \cdot x_0 + |\alpha_0| \cdot x_1 ,\ |\alpha_1| \cdot y_0 + |\alpha_0| \cdot y_1 \right]$$

Ao pressionar *Verificar* é impresso na janela de saída a resposta. Se o segmento *p0p1* cruza a linha *m*, o programa imprime o ponto onde ocorre a interseção. Para visualizar o segmento e a linha, selecione o Checkbox *Desenha Reta / Segmento*.

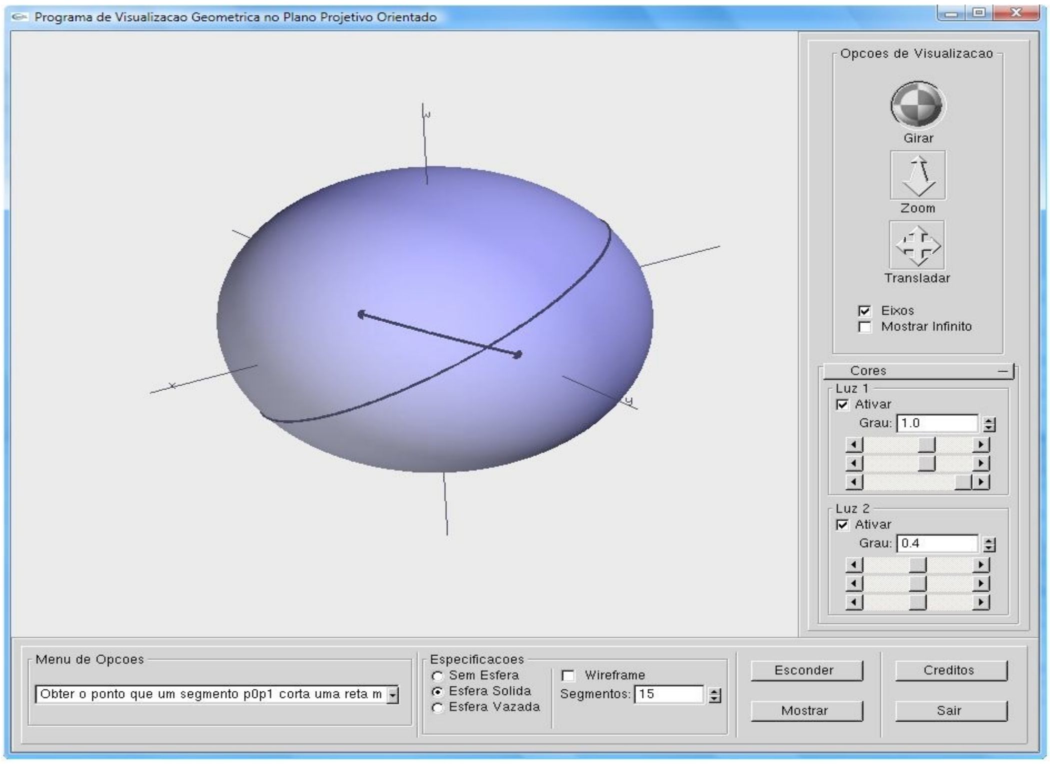

Figura 3 - O segmento *p0p1* cortando a reta *m*.

Opção 5 – Determinar uma reta que passa por dois pontos

Na quinta opção do programa, o usuário digita dois pontos, $p_0 = [w_0, x_0, y_0]$ e $p_1 = [w_1, x_1, y_1]$, sobre os quais deseja traçar uma reta.

Como destacado anteriormente, na geometria projetiva temos que sobre dois pontos não antipodais passam duas retas coincidentes com orientações opostas. Isto é, uma no *Aquém* e outra no *Além*, onde uma reta é antipodal a outra. Neste programa apenas uma das retas é esboçada no Modelo Esférico.

Para deduzir os coeficientes das retas que passam por p_0 e p_1, inicialmente iremos estabelecer a condição de colinariedade entre eles e um terceiro ponto genérico $p_g = [w_g, x_g, y_g]$. Três pontos são colineares se o determinante entre eles é zero:

$$\begin{vmatrix} w_0 & x_0 & y_0 \\ w_1 & x_1 & y_1 \\ w_g & x_g & y_g \end{vmatrix} = 0$$

Expandindo este determinante pela última linha obtemos uma das duas retas:

$$p_0 \vee p_1 = \left\langle \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} w_0 & y_0 \\ w_1 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} w_0 & x_0 \\ w_1 & x_1 \end{vmatrix} \right\rangle$$
$$= \langle +x_0 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_0, -w_0 \cdot y_1 + w_1 \cdot y_0, +w_0 \cdot x_1 - w_1 \cdot x_0 \rangle$$

A outra reta é a sua antipodal, dada por $\neg(p_0 \vee p1)$.

Finalmente, ao pressionar *Desenha Reta / Pontos* são esboçados os dois pontos e a reta que passa por eles. (Dica: Habilite o Checkbox *Desenha Retas / Pontos* e experimente mudar as coordenadas de um dos pontos e em seguida, pressione *Determinar Reta*.)

Opção 6 – Obter os pontos de interseção entre duas retas

Destacando o conceito da Dualidade, a opção seis explora a simetria existente entre as fórmulas que tratam de pontos e retas na geometria projetiva. Esta simetria pode ser verificada pela semelhança das fórmulas usadas na opção cinco e seis.

A *Dualidade* entre pontos e retas do plano projetivo é um princípio importante pois ela nos permite traduzir diversas fórmulas geométricas que envolvem pontos em outras fórmulas que envolvem linhas, e vice-versa. Isto facilita o desenvolvimento e programação de algoritmos geométricos à medida que o tempo de desenvolvimento fica substancialmente reduzido.

Para encontrar o ponto de interseção de duas retas, usamos uma fórmula análoga à usada na quinta opção:

$$p_0 \wedge p_1 = \left[\begin{vmatrix} X_0 & Y_0 \\ X_1 & Y_1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} W_0 & Y_0 \\ W_1 & Y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} W_0 & X_0 \\ W_1 & X_1 \end{vmatrix} \right]$$
$$= [+X_0 \cdot Y_1 - X_1 \cdot Y_0, -W_0 \cdot Y_1 + W_1 \cdot Y_0, +W_0 \cdot X_1 - W_1 \cdot X_0]$$

Ao pressionar o botão *Verificar*, os dois pontos de interseção são impressos na janela de saída.

Opção 7 – Desenho de segmento dado dois pontos

Com o objetivo de visualizar segmentos no plano projetivo orientado, nesta opção o usuário digita os dois pontos pelos quais será traçado um segmento. Ao selecionar o Checkbox *Desenha Segmento*, o esboço é feito sobre a esfera unitária.

Para o esboço do segmento, normalizamos os dois pontos digitados e calculamos o ângulo θ_7 entre eles utilizando a fórmula descrita na primeira opção do programa. Em seguida, usando o comando *glVertex3f* do OpenGL, plotamos ponto a ponto o segmento, variando *t* de 0 a θ_7.

Opção 8 – Determinar em que lado de uma reta está um ponto

Determinar o lado de uma reta que contém um ponto é outra operação muito importante para algoritmos geométricos. Nesta opção introduzimos o conceito de *lados da reta* [1], isto é, os pontos [w, x, y] que não estão sobre a reta r = ⟨W, X,Y⟩ podem estar em seu *lado positivo* ou em seu *lado negativo*.

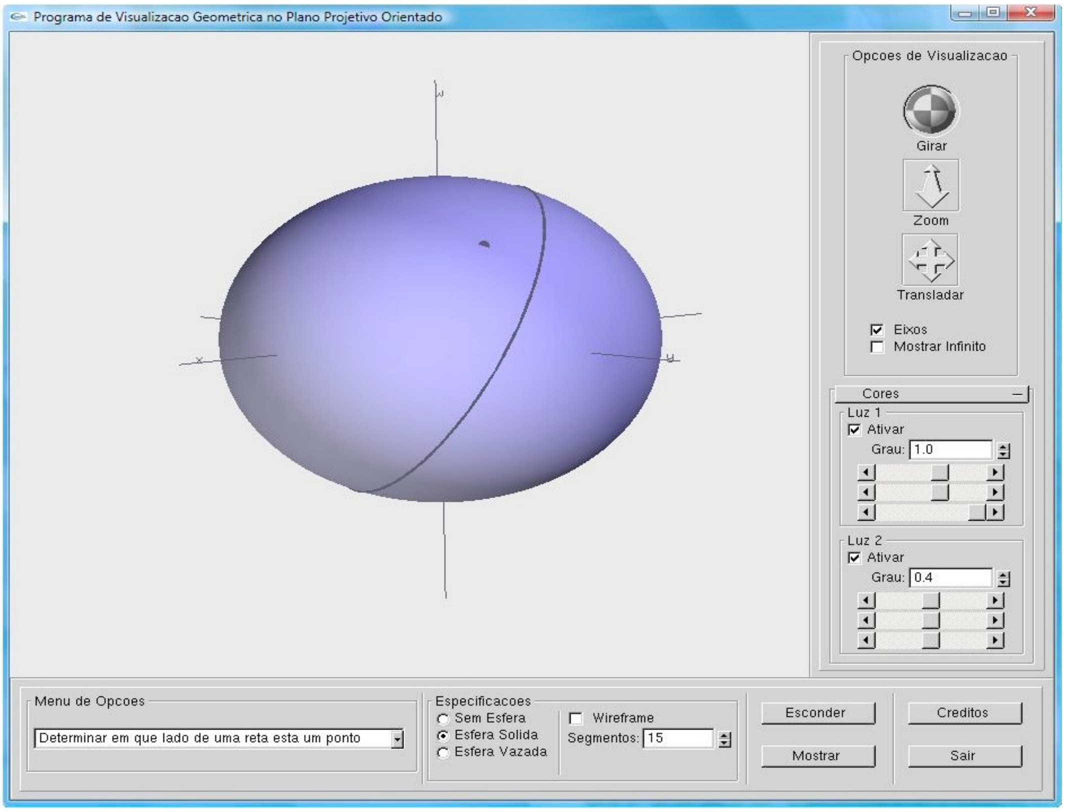

Figura 4 - O ponto *p* no *lado positivo* da reta *r*.

Para avaliar o lado da reta que contém um ponto, avaliamos o sinal da expressão $W \cdot w + X \cdot x + Y \cdot y$, isto é, realizamos o teste de ponto contra reta:

$$r \diamond p = sgn(W \cdot w + X \cdot x + Y \cdot y)$$

Onde r = ⟨W, X ,Y⟩ e p = [w,x,y] são respectivamente os coeficientes da reta e o ponto digitados pelo usuário. Assim, se $r \diamond p < 0$ temos um ponto no *lado negativo* da reta. Entretanto, se $r \diamond p > 0$ temos um ponto no *lado positivo* da reta.

Uma vez digitados os coeficientes e o ponto, ao pressionar o botão *Verificar* é realizado o teste de ponto contra reta e o lado da reta que contém o ponto é impresso na janela de saída. Para visualizá-los, selecione o Checkbox *Desenha Reta / Ponto*.

Opção 9 – Determinar a equação da cônica que passa por cinco pontos

Complemento de nosso estudo da geometria projetiva, as opções nove e dez tem como objetivo explorar a teoria projetiva das cônicas e as aplicações destas teorias em problemas de ajuste de curvas. Usamos a geometria projetiva para trabalhar com as cônicas pois desta forma as cônicas são visualmente mais fáceis de serem caracterizadas.

Em resumo, temos que *cônica* é o conjunto de todos os pontos p = [x,y,z] no plano projetivo que satisfazem a equação homogênea do segundo grau (*forma quadrática*):

$$A\cdot x^2 + B\cdot y^2 + C\cdot z^2 + D\cdot x\cdot y + E\cdot x\cdot y + F\cdot y\cdot z = 0$$

Toda forma quadrática pode ser representada pelo produto $p\cdot Q\cdot p^T$, onde p = [x, y, z] e Q é uma matriz simétrica 3 × 3 chamada *matriz associada da cônica*:

$$Q = \begin{pmatrix} A & \frac{1}{2}D & \frac{1}{2}E \\ \frac{1}{2}D & B & \frac{1}{2}F \\ \frac{1}{2}E & \frac{1}{2}F & C \end{pmatrix}$$

As cônicas podem ser classificadas em *degeneradas* ou *não degeneradas*. Dizemos que uma cônica projetiva é *degenerada* se for um par de retas, uma reta, um ponto ou o vazio. Já uma cônica *não degenerada* não possui retas ou pontos isolados em seu gráfico, podendo ser um círculo, uma elipse, parábola ou hipérbole.

Nesta opção do programa, exploramos uma das aplicações da geometria projetiva em cônicas. Nosso objetivo é obter a equação de uma cônica que passa por quaisquer cinco pontos $P_1[w_1, x_1, y_1],\ P_2[w_2, x_2, y_2],\ P_3[w_3, x_3, y_3],\ P_4[w_4, x_4, y_4],\ P_5[w_5, x_5, y_5]$, sendo que quatro destes pontos não podem ser colineares. Se três destes pontos forem colineares, a cônica será *degenerada*. Caso contrário, ela será *não degenerada*.

O usuário digita os cinco pontos[3] e ao pressionar *Obter Equação da Cônica* é impresso na janela de saída, a equação da cônica que passa por estes cinco pontos.

Para classificar e esboçar a cônica, devemos avaliar qual é a equação da cônica que passa pelos cinco pontos. Inicialmente encontramos os coeficientes da equação quadrática, calculando o determinante da matriz:

$$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 & x\cdot y & x\cdot z & y\cdot z \\ x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & x_1\cdot y_1 & x_1\cdot z_1 & y_1\cdot z_1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & x_2\cdot y_2 & x_2\cdot z_2 & y_2\cdot z_2 \\ x_3^2 & y_3^2 & z_3^2 & x_3\cdot y_3 & x_3\cdot z_3 & y_3\cdot z_3 \\ x_4^2 & y_4^2 & z_4^2 & x_4\cdot y_4 & x_4\cdot z_4 & y_4\cdot z_4 \\ x_5^2 & y_5^2 & z_5^2 & x_5\cdot y_5 & x_5\cdot z_5 & y_5\cdot z_5 \end{vmatrix} = 0$$

Em seguida, devemos classificar a cônica. Para tanto, a reescrevemos na forma matricial e encontramos uma matriz diagonal $R = M\cdot Q\cdot M^T$ usando a *Decomposição LU*,

3 Verificou-se erros numéricos em alguns casos, devidos basicamente ao fato de que os pontos dados não estavam em posição geral.

cujos elementos da diagonal principal (*pivôs*) caracterizam a cônica. As possíveis formas da matriz R são:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

(a) (b) (c) (d) (e) (f)

Onde (a) representa uma cônica sem pontos, (b) representa um ponto, (c) representa um par de retas, (d) uma reta. Estas são as formas matriciais reduzidas das cônicas *degeneradas*. Já em (e) temos a forma matricial reduzida de uma cônica *não degenerada*, isto é, todas as figuras projetivamente equivalentes ao círculo unitário. Para maiores detalhes, ver [2].

Se a cônica for *degenerada* o programa exibe um aviso na janela de saída e a cônica não é, portanto, esboçada. Entretanto, se a cônica for *não degenerada*, os cinco pontos e a cônica que passa por eles são esboçados. Observamos que também é desenhada a cônica antipodal.

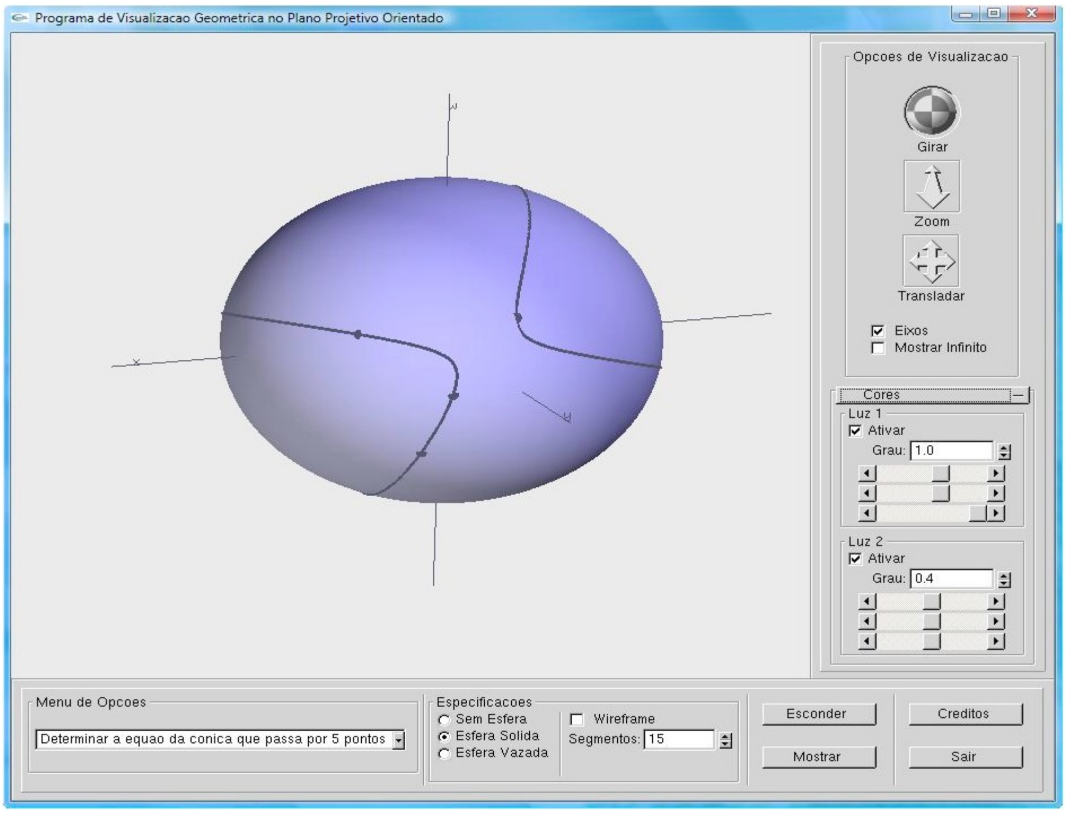

Figura 5 - Os cincos pontos e a cônica que passa por eles.

Opção 10 – Desenho de cônicas

Nesta opção, em continuação do nosso estudo de cônicas, fica claro a vantagem de se usar os conceitos da geometria projetiva, em especial o conceito de *infinito*, no tratamento de cônicas. Graças ao Modelo Esférico e aos fundamentos expostos na opção nove, somos capazes de caracterizar visualmente uma cônica dada sua forma matricial.

Uma vez digitados os elementos $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{31}$ (lembrando que toda matriz associada é simétrica), conseguimos classificar a cônica pelo número de vezes que ela intercepta o infinito. Veja:

Tabela de Classificação de Cônicas

Figura Geométrica	**Característica Visual**
Elipse	Não intercepta o Infinito
Hipérbole	Intercepta o Infinito em *dois* pontos
Parábola	Tangência o Infinito em *um* ponto

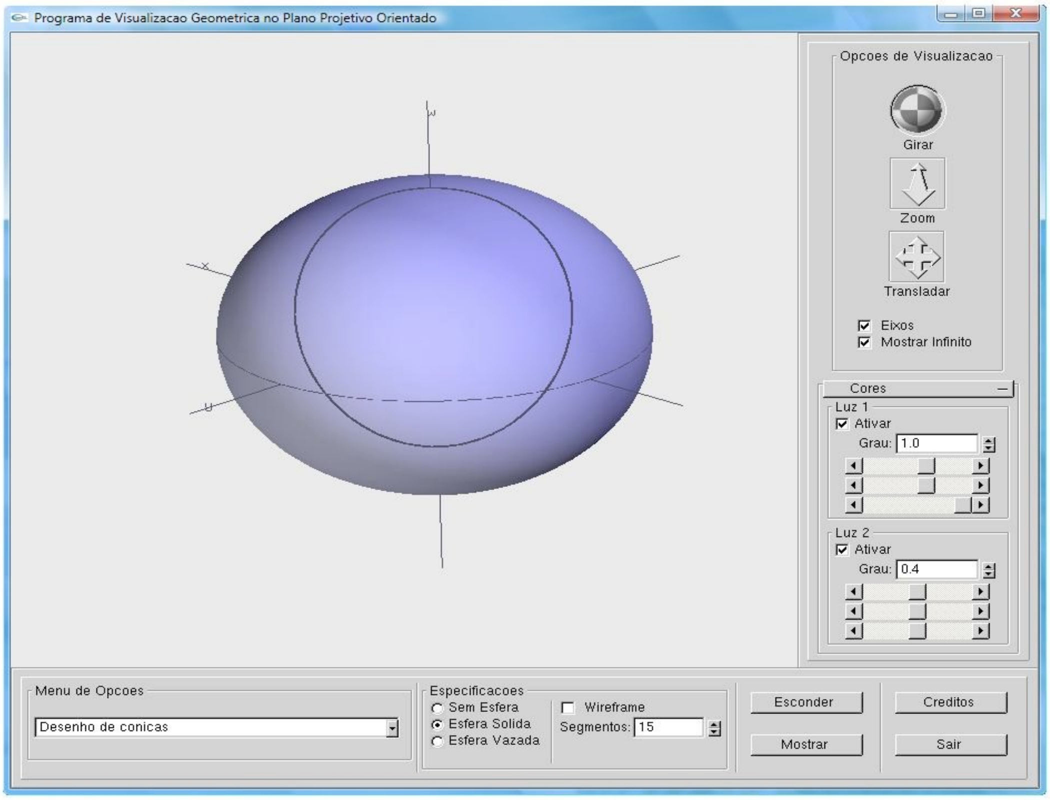

Figura 6 - O esboço de uma cônica que intercepta o infinito em dois pontos. Trata-se de uma Hipérbole.

Conclusão

Motivados pela dificuldade de visualizar os conceitos fundamentais da Geometria Projetiva, constatamos a necessidade de criar um programa computacional com uma interface objetiva e fácil de usar, que fosse capaz de ajudar na compreensão desta geometria.

Relacionamos com a Geometria Euclidiana clássica, o que nos permitiu entender e interpretar as noções de infinito, dualidade e interseções entre retas. Além disso, observamos as vantagens dos conceitos geométricos sobre a ótica projetiva na elaboração do algoritmo do programa, dada a sua capacidade de tornar os cálculos mais robustos.

Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer aos professores Thomas Lewiner e Sinésio Pesco e ao aluno de doutorado Marcos Lage da Pontifícia Universidade Católica pela constante ajuda no decorrer do desenvolvimento deste trabalho. E o aluno gostaria de agradecer a PUC-Rio pelo apoio recebido através da bolsa TEPP.

Referências

[1] - STOLFI, J. & RESENDE P. **Fundamentos de Geometria Computacional**. IX Escola de Computação, Recife, Julho 1994.

[2] - PENNA, M. A. & PATTERSON R. R. **Projective Geometry and Its Applications to Computer Graphics**. Prentice-Hall, 1986.