

# TEORIA ERGÓDICA, SISTEMAS DINÂMICOS E MEDIDAS INVARIANTES

**Aluno: Juliana Arcoverde V. L. Ribeiro**  
**Orientador: Lorenzo Justiniano Díaz Casado**

## Introdução

A Teoria dos Sistemas Dinâmicos, ou mais exatamente Teoria Ergódica, tem sido aplicada ao longo dos últimos anos de diversas maneiras, podendo ser utilizada para resolver problemas tanto de Teoria dos Números e Topologia quanto outros que envolvem aplicações em Geometria Diferencial e Probabilidade. Por sua vez, através do estudo do comportamento assintótico das órbitas de transformações (endomorfismos, difeomorfismos e fluxos), os métodos de Sistemas Dinâmicos também têm sido amplamente utilizados, podendo explicar fenômenos complexos nas diversas ciências, como: Química (reações químicas, processos industriais), Física (turbulência, transição de fase, ótica), Biologia (competição de espécies, neurobiologia), Economia (modelos de crescimento econômico, mercado financeiro) e muitas outras.

O presente estudo teve como principal objetivo a compreensão de importantes conceitos, teoremas e problemas envolvendo sistemas dinâmicos e sua correlação com a Teoria Ergódica. Para tal, observamos alguns dos principais resultados da Teoria da Medida e exemplos de medidas invariantes, como, por exemplo, a Transformação de Gauss. Estudamos também o Teorema de Recorrência de Poincaré.

## Teoria da Medida

Iniciamos o estudo revendo a Teoria da Medida e alguns de seus principais elementos e resultados. Foram introduzidos alguns importantes conceitos, como noções de álgebra e  $\sigma$ -álgebra de conjuntos e técnicas para sua construção, espaços mensuráveis e espaços de medidas. Nesse ponto, foram analisadas duas importantes classes de medidas: medidas de Lebesgue em espaços Euclidianos e medidas produto em espaço de seqüências, além do Teorema de Radon-Nikodym.

## Teorema de Recorrência de Poincaré

De posse do conhecimento desses importantes elementos, começamos o estudo do Teorema de Recorrência de Poincaré.

Sabemos que um ponto qualquer  $x \in M$  é tido como recorrente se sua trajetória pelo sistema dinâmico  $f: M \rightarrow M$  volta arbitrariamente perto de  $x$  quando o tempo vai para o infinito. Como a dinâmica dos pontos não-recorrentes será, em determinado sentido, sempre a mesma, é fundamental compreender o conjunto dos pontos recorrentes, visto que ele contém toda a dinâmica interessante do sistema.

No final do século XIX, Poincaré afirmou o seguinte enunciado: “Quase todo o ponto é recorrente, relativamente a qualquer medida invariante *finita* do sistema dinâmico”. É

possível inferir duas versões desse enunciado, uma de linguagem mensurável e outra de natureza topológica.

- Versão Mensurável:

Inicialmente, considere sempre medidas  $\mu$  definidas na  $\sigma$ -álgebra de Borel do espaço  $M$ . Podemos afirmar que  $\mu$  é uma probabilidade se  $\mu(M)=1$ . Mas na maior parte dos casos serão levadas em consideração apenas medidas finitas, ou seja, com  $\mu(M)<8$ . Podemos, então, transformar  $\mu$  numa probabilidade  $\nu$ . Para tal, basta definirmos:

$$\nu(E) = \frac{\mu(E)}{\mu(M)} \text{ para cada conjunto mensurável } E \subset M$$

Podemos caracterizar uma medida  $\mu$  como invariante pela transformação  $f$  se:

$$\mu(E) = \mu(f^{-1}(E)) \text{ para todo conjunto mensurável } E \subset M$$

É possível verificar a coerência dessa afirmação, uma vez que a pré-imagem de um conjunto mensurável por uma transformação mensurável ainda é um conjunto mensurável.

Colocando em palavras, podemos dizer que a probabilidade de um ponto estar num dado conjunto e a probabilidade dele de que sua imagem esteja nesse conjunto são iguais.

### Teorema 1:

Seja  $f : M \rightarrow M$  uma transformação mensurável e  $\mu$  uma medida invariante finita. Seja  $E \subset M$  qualquer conjunto mensurável com  $\mu(E) > 0$ . Então,  $\mu$ -quase todo ponto  $x \in E$  tem algum iterado  $f^n(x)$ ,  $n = 1$ , que também esté em  $E$ .

Ou seja, tal teorema afirma que quase todo ponto de  $E$  regressa a  $E$  no futuro.

### Demonstração Teorema 1:

Representemos por  $E^0$  o conjunto dos pontos  $x \in E$  que nunca regressam a  $E$ . O

nosso objetivo é provar que  $E^0$  tem medida nula. Para isso, começamos por afirmar que as suas pré-imagens  $f^{-n}(E^0)$  são disjuntas duas-a-duas. De fato, suponhamos que existem  $m > n = 1$  tais que  $f^{-m}(E^0)$  intersecta  $f^{-n}(E^0)$ . Seja  $x$  um ponto na

intersecção e seja  $y = f^n(x)$ . Então  $y \in E^0$  e  $f^{m-n}(y) = f^m(x) \in E^0$ , que está

contido em  $E$ . Isto quer dizer que  $y$  volta pelo menos uma vez a  $E$ , o que contradiz a definição de  $E^0$ . Esta contradição prova que as pré-imagens são disjuntas duas-a-duas, como afirmamos.

Isto implica que

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(E^0)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(f^{-n}(E^0)) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(E^0).$$

Na última igualdade usamos a hipótese de que  $\mu$  é invariante, que implica que  $\mu(f^{-n}(E^0)) = \mu(E^0)$  para todo  $n = 1$ . Como supomos que a medida é finita, a expressão do lado esquerdo é finita. Por outro lado, à direita temos uma soma de infinitos termos, todos iguais. O único jeito desta soma ser finita é que as parcelas sejam nulas. Portanto, devemos ter  $\mu(E^0) = 0$ , tal como foi afirmado.?

É possível mostrar ainda que este fato implica outro aparentemente mais forte: quase todo ponto de  $E$  regressa a  $E$  infinitas vezes:

**Corolário 1:**

Nas condições do Teorema 1, para  $\mu$ -quase todo ponto  $x \in E$  existem infinitos valores de  $n = 1$  tais que  $f^n(x)$  está em  $E$ .

**Demonstração Corolário 1:**

Para cada  $k = 1$  vamos representar por  $E_k$  o conjunto dos pontos  $x \in E$  que regressam a  $E$  exatamente  $k$  vezes: existem exatamente  $k$  valores de  $n = 1$  tais que

$f^n(x) \in E$ . Observe que o conjunto dos pontos que regressam a  $E$  apenas um número

finito de vezes é precisamente:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

Portanto, para provar o corolário, basta mostrar que  $\mu(E_k) = 0$  para todo  $k = 1$ . A demonstração será por contradição.

Suponhamos que  $\mu(E_k) > 0$  para algum  $k = 1$ . Então, aplicando o Teorema 1 com este  $E_k$  no lugar de  $E$ , obtemos que quase todo ponto  $x \in E_k$  tem algum iterado  $f^n(x)$  que está em  $E_k$ . Fixemos um tal  $x$  e denotemos  $y = f^n(x)$ . Por definição,  $y$  tem exatamente  $k$  iterados futuros que estão em  $E$ . Como  $y$  é um iterado de  $x$ , isso implica que  $x$  tem  $k + 1$  iterados futuros em  $E$ . Mas isso contradiz o fato de que  $x \in E_k$ . Esta contradição prova que  $E_k$  tem medida nula, relativamente a  $\mu$ , e portanto o corolário está demonstrado. ?

- Versão Topológica:

Podemos estender o conceito de recorrência de um ponto utilizando vizinhanças.

Dizemos que um ponto  $x \in M$  é recorrente para uma transformação  $f : M \rightarrow M$  se, para

toda vizinhança  $U$  de  $x$ , existir algum iterado  $f^n(x)$  que está em  $U$ .

Na formulação topológica do teorema de recorrência supomos que o espaço  $M$  admite

uma base enumerável de abertos, ou seja, um família enumerável  $\{U_k : k \in \mathbb{N}\}$  de abertos

tal que todo aberto de  $M$  pode ser escrito como a união de elementos  $U_k$  dessa família. Esta hipótese é satisfeita na maioria dos exemplos interessantes.

**Teorema 2:**

Suponhamos que  $M$  admite uma base enumerável de abertos. Seja  $f : M \rightarrow M$  uma transformação mensurável e  $\mu$  uma medida invariante finita. Então,  $\mu$ -quase todo ponto  $x \in M$  é recorrente para  $f$ .

### Demonstração do Teorema 2:

Para cada  $k$  representamos por  $U_k^0$  o conjunto dos pontos  $x \in U_k$  que nunca regressam a  $U_k$ . De acordo com o Teorema 1, todo  $U_k^0$  tem medida nula. Consequentemente, a união enumerável

$$\tilde{U} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k^0$$

tem medida nula. Portanto, para demonstrar o teorema será suficiente que mostremos que todo ponto  $x$  que não está em  $\tilde{U}$  é recorrente. Isso é fácil, como veremos.

Seja  $x \in M \setminus \tilde{U}$  e seja  $U$  uma vizinhança qualquer de  $x$ . A definição de base de

abertos implica que existe algum  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $x \in U_k$  e  $U_k \subset U$ . Como  $x$  não está em

$\tilde{U}$ , também  $x \notin U_k^0$ . Em outras palavras,  $x$  tem algum iterado  $f^n(x)$ ,  $n \geq 1$  que está em  $U_k$ . Em particular,  $f^n(x)$  também está em  $U$ . Como a vizinhança  $U$  é arbitrária, isto prova que  $x$  é um ponto recorrente, como havíamos afirmado.

Podemos, ainda, estender um pouco mais o enunciado de Poincaré e observar a hipótese de finitude da medida. Veremos que ela não pode ser omitida.

É fácil observar que, em geral, se omitirmos tal hipótese, as conclusões dos Teoremas 1 e 2 não serão mais válidas. Observe o seguinte exemplo:

### Exemplo 1:

Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a translação de 1 unidade, isto é,  $f(x) = x + 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

É fácil verificar que  $f$  deixa invariante a medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}$  (que é infinita). Por outro lado, nenhum ponto é recorrente para  $f$ .

No entanto, é possível estender estes enunciados para certos casos de medidas infinitas como no seguinte exemplo:

### Exemplo 2:

Suponha que  $f : M \rightarrow M$  é invertível e que  $\mu$  é uma medida  $\sigma$ -finita invariante por  $f$ . Mostre que, dado qualquer conjunto mensurável  $E \subset M$  com  $\mu(E) > 0$ , quase todo ponto  $x \in E$  ou regressa a  $E$  ou “vai para infinito”.

Podemos considerar o conjunto  $E^{0,k}$  dos pontos  $x \in E$  que nunca regressam a  $E$  e têm um número infinito de iterados em  $M_k$ . Começamos mostrando que os seus iterados  $f^n(E^{0,k})$  são dois-a-dois disjuntos. Usando que  $\mu(M_k)$  é finito, podemos deduzir que  $\mu(E^{k,0}) = 0$  para todo  $k$ .

Uma transformação  $f : M \rightarrow M$  diz-se invertível se é uma bijeção e a sua inversa é também uma transformação mensurável. Uma medida  $\mu$  diz-se  $\sigma$ -finita se existe uma sequência crescente de subconjuntos  $M_k$  cuja união é o espaço  $M$  inteiro e tal que cada  $\mu(M_k)$  é finito. Neste caso, diremos que um ponto  $x$  “vai para infinito” se, para qualquer  $k$ , existe apenas um número finito de iterados de  $x$  que estão em  $M_k$ .

## Alguns Exemplos de Medidas Invariantes

### Proposição 1:

Seja  $f : M \rightarrow M$  uma transformação e  $\mu$  uma medida. Então  $f$  preserva  $\mu$  se, e somente se, para toda função integrável  $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$  vale:

$$\int \phi d\mu = \int \phi \circ f d\mu.$$

Partindo dessa proposição, estudamos alguns exemplos de transformações com medidas invariantes.

- Expansão Decimal:

Podemos caracterizar uma transformação decimal da seguinte maneira:

$$f : [0, 1] \rightarrow [0, 1], f(x) = 10x - [10x]$$

onde  $[10x]$  representa o maior inteiro menor ou igual a  $10x$ . Em outras palavras,  $f$  associa a cada  $x \in [0, 1]$  a parte fracionária de  $10x$ .

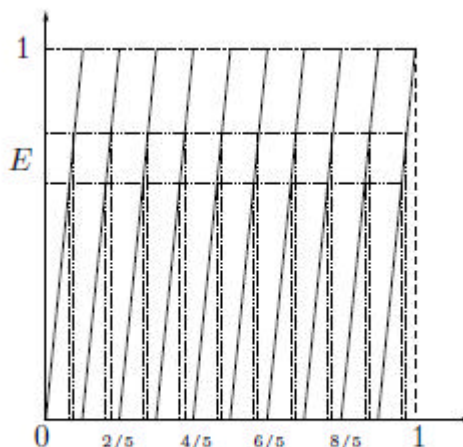


Figura 2.1: Transformação parte fracionária de  $10x$

A medida de Lebesgue  $\mu$  no intervalo é invariante pela transformação  $f$ , isto é, satisfaz a seguinte condição:  $\mu(E) = \mu(f^{-1}(E))$ .

Começemos por supor que  $E$  é um intervalo. Então, como ilustrado na Figura 2.1, a pré-imagem  $f^{-1}(E)$  consiste de dez intervalos, cada um deles dez vezes mais curto do que  $E$ . Logo, a medida de Lebesgue de  $f^{-1}(E)$  é igual à medida de Lebesgue de  $E$ . Isto mostra que tal condição é satisfeita no caso de intervalos. Por outro lado, a família dos intervalos gera a  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $[0, 1]$ . Portanto, para concluir a demonstração basta usar o seguinte fato geral:

**Lema 1:**

Seja  $f : M \rightarrow M$  uma transformação mensurável e  $\mu$  uma medida finita em  $M$ . Suponha que existe uma sub-álgebra geradora  $I$  da  $\sigma$ -álgebra de  $M$  tal que  $\mu(E) = \mu(f^{-1}(E))$  para todo  $E \in I$ . Então o mesmo vale para todo conjunto mensurável  $E$ , isto é, a medida  $\mu$  é invariante por  $f$ .

Depois de provar que a medida de Lebesgue é invariante pela transformação  $f$ , podemos utilizar o Teorema de Poincaré e obter conclusões bastante interessantes.

Começemos por observar que  $f$  tem uma expressão muito simples em termos de expansões decimais: se  $x$  é dado por

$$x = 0, a_0 a_1 a_2 a_3 \dots$$

com  $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ , então a sua imagem é dada por

$$f(x) = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$$

Com isso, fica muito fácil escrever a expressão do iterado  $n$ -ésimo, para qualquer  $n \geq 1$ :

$$f^n(x) = 0, a_n a_{n+1} a_{n+2} \dots$$

Agora, seja  $E$  o subconjunto dos  $x \in [0, 1]$  cuja expansão decimal começa com o dígito 7, ou seja, tais que  $a_0 = 7$ . De acordo com o Corolário 1 (da versão mensurável do

Teorema de Poincaré), quase todo elemento de  $E$  tem infinitos iterados que também estão em  $E$ . Levando em conta a última expressão, isto quer dizer que existem infinitos valores de  $n$  tais que  $a_n = 7$ . Portanto, provamos que quase todo número  $x$  cuja expansão decimal começa por 7 tem infinitos dígitos iguais a 7!

Também podemos utilizar outros dígitos no lugar do 7 e, ainda, estender o conceito para blocos de dígitos.

Partindo do Teorema Ergódico de Birkhoff, podemos concluir também que para quase todo número  $x \in [0, 1]$ , todo dígito aparece com frequência  $1/10$  na sua expansão decimal.

- Transformação de Gauss:

A Transformação de Gauss é definida por:

$$G: (0,1] \rightarrow [0,1]$$

$$G(x) = \frac{1}{x} - \left[ \frac{1}{x} \right]$$

Ou seja,  $G(x) =$  parte fracionária de  $\frac{1}{x}$

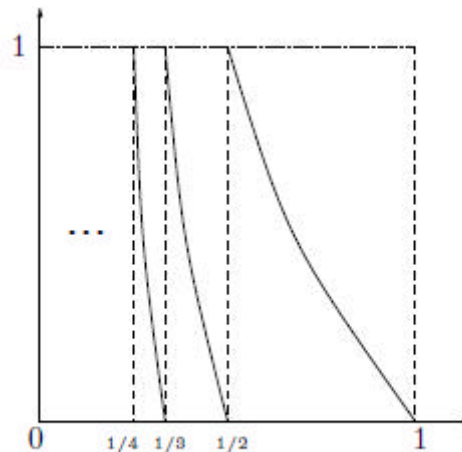


Figura 2.2: Transformação de Gauss

Observamos que:

- Se  $x \in (1/2, 1]$  então  $1/x \in [1, 2)$  e portanto a sua parte inteira  $[1/x]$  é igual a 1. Isto quer dizer que neste intervalo a transformação é dada por  $G(x) = (1/x) - 1$ .
- Mais geralmente, se  $x \in (1/(k+1), 1/k)$  para algum  $k \in \mathbb{N}$  então a parte inteira de  $1/x$  é igual a  $k$ , e tem-se  $G(x) = 1/x - k$ . Observe a figura da transformação.

Note que  $G$  não está definida no ponto  $x = 0$ . Além disso,  $G(1/k) = 0$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ ?

$\mathbb{N}$  e portanto o segundo iterado  $G_2(1/k)$  não está definido nestes pontos (e o terceiro iterado não está definido nas suas pré-imagens, etc). Isto quer dizer, a rigor, que  $G$  não é um sistema dinâmico, segundo a definição dada anteriormente. No entanto, isto não coloca nenhum problema para o que pretendemos fazer. De fato, todos os iterados estão bem definidos no conjunto dos números irracionais: basta observar que a imagem de um

irracional também é irracional. Isto é suficiente para os nossos objetivos porque sempre tratamos de propriedades que valem para quase todo ponto, e o conjunto dos números irracionais tem medida de Lebesgue total no intervalo.

O que torna esta transformação interessante do ponto de vista ergódico é que  $G$  admite uma probabilidade invariante que é equivalente à medida de Lebesgue no intervalo. De fato, considere a medida definida por

$$\mu(E) = \int_E \frac{c}{1+x} dx \quad \text{para cada mensurável } E \subset [0, 1]$$

onde  $c$  é uma constante positiva. Note que a integral está bem definida, já que a função integranda é contínua no intervalo  $[0, 1]$ . Note também que

$$\frac{c}{2} m(E) \leq \mu(E) \leq cm(E) \quad \text{para todo mensurável } E \subset [0, 1].$$

Em particular,  $\mu$  é de fato equivalente à medida de Lebesgue  $m$ : as duas medidas têm os mesmos conjuntos com medida nula.

**Proposição 2:**

A medida  $\mu$  é invariante por  $G$ . Além disso, se escolhermos  $c = 1/\log 2$  então  $\mu$  é uma probabilidade.

**Demonstração da Proposição 2:**

Vamos usar o seguinte critério: a medida  $\mu$  é invariante por  $G$  se tivermos

$$\sum_{x \in f^{-1}(y)} \frac{\rho(x)}{|G'(x)|} = \rho(y) \quad \text{onde } \rho(x) = \frac{c}{1+x}$$

para todo  $y$ . Comece por observar que cada  $y$  tem exatamente uma pré-imagem  $x_k$  em cada intervalo  $(1/(k+1), 1/k]$ , dada por

$$G(x_k) = \frac{1}{x_k} - k = y \quad \Leftrightarrow \quad x_k = \frac{1}{y+k}$$

Note também que  $G'(x) = (1/x)' = -1/x^2$ . Portanto, podemos substituir a primeira igualdade por:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{cx_k^2}{1+x_k} = \frac{c}{1+y} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(y+k)(y+k+1)} = \frac{c}{1+y}$$

Para verificar que esta igualdade é realmente satisfeita, observe que

$$\frac{1}{(y+k)(y+k+1)} = \frac{1}{y+k} - \frac{1}{y+k+1}$$

Isto quer dizer que a última soma em pode ser escrita na forma telescópica: todos os termos, exceto o primeiro, aparecem duas vezes, com sinais contrários, e portanto se cancelam. Logo a soma é igual ao primeiro termo, que é precisamente o que se afirma na igualdade. Isto prova a invariância.

Finalmente, usando a primitiva  $c \log(1+x)$  da função  $\rho(x)$  vemos que

$$\mu([0, 1]) = \int_0^1 \frac{c}{1+x} dx = c \log 2.$$

Logo, escolhendo  $c = 1/\log 2$  obtemos que  $\mu$  é uma probabilidade. ?

Utilizando alguns conceitos de Teoria Ergódica, obtemos algumas conclusões bastante interessantes, como o seguinte teorema:

**Teorema 3:**

A transformação de Gauss é ergódica com relação à medida de Gauss  $\mu$ .

Em Teoria dos Números, também foram obtidos outros resultados.

Verificamos que, para quase todo número  $x_0 \in (1/8, 1/7)$  o número 7 aparece infinitas vezes na sua expansão em fração contínua, isto é, tem-se  $a_n = 7$  para infinitos valores de  $n \in \mathbb{N}$ .

Extendendo um pouco mais esse conceito, podemos também determinar a frequência com que um determinado número natural aparece na sequência de quocientes de quase todo número real  $x$ :

**Proposição 3:**

Para quase todo número  $x \in (0,1]$ , a frequência com que aparece um número  $k \in \mathbb{N}$  na expansão em frações contínuas  $[a_1(x), a_2(x), \dots]$  de  $x$  verifica:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{i \in [1, n] : a_i(x) = k\}}{n} = \frac{\log\left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right)}{\log 2} = \mu(I_k)$$

Também foram estudados Sistemas Conservativos e Deslocamentos (“shifts”) de Bernoulli.

## **Conclusões**

O presente estudo permitiu uma maior compreensão de alguns importantes conceitos, teoremas e problemas envolvendo sistemas dinâmicos e de sua correlação com a Teoria Ergódica. Esse novo conhecimento possibilitou, por exemplo, o entendimento de propriedades sobre a distribuição de dígitos na expansão de frações contínuas de quase todo número do intervalo  $[0,1)$ , que é um conjunto de medida Gauss total. Utilizando as conclusões sobre a ergodicidade da Transformação de Gauss, o Teorema de Birkhoff e os conceitos das medidas de Gauss e Lebesgue, foi possível obter a frequência com que um determinado número natural aparece na sequência de quocientes de quase todo número real  $x$ .

## **Referências**

1 – DÍAZ, Lorenzo J. ; JORGE, Danielle de Rezende. **Uma introdução aos Sistemas Dinâmicos via Frações Contínuas**. 26º Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, 2007. 211 p.

2 – OLIVEIRA, Krerley. **Um primeiro curso em Teoria Ergódica e aplicações**. 97 p

3 - OLIVEIRA, Krerley , VIANA, Marcelo. **Introdução à Teoria Ergódica**. 150 p