TEOREMA DA UNIFORMIZAÇÃO DE RIEMANN

Aluno: Ricardo Lomba de Araujo Junior
Orientador: Flávio Erthal Abdenur

Introdução

O Teorema de Riemann é um dos mais importantes resultados obtidos em Análise Complexa, um ramo da Matemática que tem se mostrado profícuo desde sua criação, em fins do século XVIII. Além de resultados muito importantes para o próprio aprimoramento da Matemática, como o Teorema Fundamental da Álgebra (toda equação polinomial possuirá ao menos uma solução) e a curiosa relação $e^{i \cdot \pi} = -1$, a teoria de funções de variáveis complexas não pode ser qualificada de nada menor que essencial para áreas como a Física Quântica e Engenharia Elétrica.

Dentre matemáticos importantes que contribuíram para seu avanço, podemos citar alguns como Euler, Gauss, Cauchy, Abel, Weierstrass, Picard, Poincaré, Hilbert e Riemann, cujo Teorema é o foco deste projeto.

Objetivos

Estudar tópicos de Análise Complexa, visando especialmente o Teorema de Riemann. Desenvolver, a partir da literatura disponível, uma demonstração envolvendo passos tão simples quanto possível. Desenvolver o raciocínio lógico-matemático e a compreensão de funções de variável complexa do orientado.

Definições

Primeiramente, faz-se necessário que alguns conceitos básicos de Análise Complexa estudados sejam apresentados.

- **Holomorfia:** *Dizemos que uma função f é holomorfa em $z_0 \in \boldsymbol{U}$ se existe o limite* $\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = f'(z_0)$. Como no domínio real, se uma função for holomorfa em todos os pontos de seu domínio, diz-se que a função é holomorfa. Holomorfia corresponde, portanto, à diferenciação complexa. De fato, como foi estudado em resultados posteriores, funções holomorfas correspondem basicamente à polinômios de grau infinito (devido à expansão em Série de Taylor). Trata-se de uma condição muito mais restritiva do que a diferenciação real, de modo que obtemos resultados que em funções de variáveis reais não são válidos. Podemos citar, por exemplo, derivadas de funções holomorfas são holomorfas. A função sin(z), o seno complexo, por exemplo, é holomorfa e sua derivada vale cos(z).

- **Analiticidade**: *Seja $U \subset \mathbb{C}$ um aberto. $f: U \to \mathbb{C}$ é dita analítica se, para todo z_0 em U, existe uma série de potências com raio de convergência $\rho > 0$ tal que para todo $z \in U$ tal que $|z - z_0| < \rho$, $f(z)$ é igual ao valor da série de potências avaliada em z.* De fato, como funções definidas por séries de potências são holomorfas, toda função analítica será também holomorfa. Além disso, podemos afirmar que funções derivadas de funções analíticas são também analíticas, e toda função analítica é de classe C^{∞}. A função

$\exp(z)$, por exemplo, pode ser descrita como $\exp(z - z_0 + z_0) = \exp(z_0)\exp(z - z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$ e é portanto analítica.

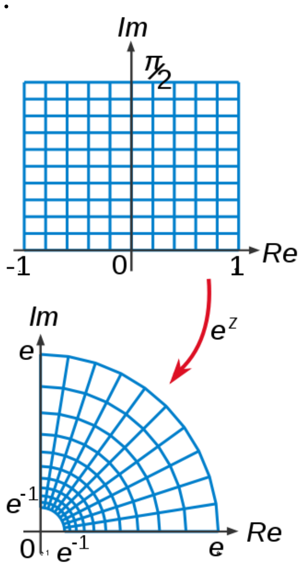
- **Meromorfia:** $f: U \to \mathbb{C}$ é dita meromorfa se existe um conjunto P tal que as seguintes condições são satisfeitas: f *é holomorfa em* $U - P$*; os pontos de* P *são isolados, ou seja,* P *é discreto; os pontos de* P *são pólos de f.* De fato, a condição de meromorfia está associada à diferenciabilidade em $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Por exemplo, $f: \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C}$ *tal que* $f(z) = \frac{1}{z}$ é meromorfa. Vale também observar que toda função holomorfa é também meromorfa.

- **Anti-holomorfia:** Funções anti-holomorfas correspondem a um conceito próximo da holomorfia, mas, entretanto, distinto com respeito à variável derivável. Dizemos que uma função $f: U \to \mathbb{C}$ é anti-holomorfa se ela for derivável com respeito a $\bar{z}$. Ou seja, se $f(\bar{z})$ for holomorfa. Observe que a composição de uma função holomorfa com outra anti-holomorfa é anti-holomorfa, enquanto que a composição de duas funções anti-holomorfas é holomorfa.

- **Família Normal de Funções:** Um subconjunto relativamente compacto de $\mathcal{H}(\mathrm{U})$, funções holomorfas de domínio U, é dito *família normal de funções holomorfas*. A definição análoga existe também para *família normal de funções meromorfas*. Esse resultado se mostra importante na demonstração do Teorema de Riemann, uma vez que o fecho em $\mathcal{H}(\mathrm{U})$ de uma família normal de funções holomorfas é compacto.

- **Funções Univalentes:** Uma função $f: U \to \overline{\mathbb{C}}$, U sendo um subconjunto aberto do plano complexo, é dita univalente se ela for holomorfa e injetiva.

- **Biholomorfismo (Equivalência Holomorfa):** Dizemos que dois abertos de $\overline{\mathbb{C}}$, U e V, são biholomorficamente equivalentes se existir uma função holomorfa e bijetora $f: U \to V$. É possível demonstrar que, dado um biholomorfismo $f: U \to V$, temos que $f^{-1}: V \to U$ também é holomorfa. Observe que uma função univalente $g: U \to \overline{\mathbb{C}}$ é também um biholomorfismo entre U e $g(U)$. Um exemplo de equivalência holomorfa, utilizando a exponencial complexa é mostrado abaixo. Nele, observamos um retângulo no plano complexo biholomorficamente equivalente ao quarto de anel de raio externo e e raio interno e^{-1}.

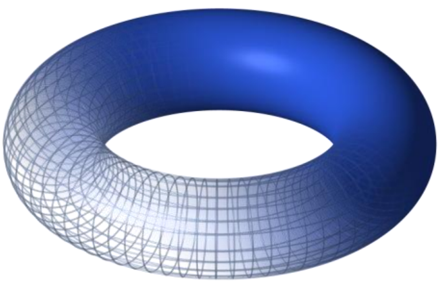


- **Equivalência Conforme:** Analogamente ao conceito de equivalência holomorfa, podemos definir as equivalências anti-holomorfas. Denominamos uma equivalência conforme $f: U \to V$ portanto uma equivalência holomorfa ou anti-holomorfa. Note que a relação "U é conformemente equivalente a *V*" é uma relação de equivalência, o que por conseqüência nos dá que "U é holomorficamente equivalente a *V*" também é uma relação de equivalência. Entretanto, "U é anti-holomorficamente equivalente a *V*" não constitui uma relação de equivalência.

- **Automorfismo:** Denominamos um automorfismo de U uma equivalência conforme $f: U \to U$, holomorfo ou anti-holomorfo, conforme o caso.

- **Homografia:** Uma homografia, também conhecida como *transformação de Moebius*, é uma função racional não-constante, que é o quociente de polinômios de grau menor ou igual a 1. Nos pontos finitos, podemos escrevê-la como $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, onde a condição de que a função é não-constante fica explicitada por $ad - bc \neq 0$. Podemos extender uma homografia a $\overline{\mathbb{C}}$ colocando $f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty, se\ c \neq 0; f(\infty) = \frac{a}{c}, se\ c \neq 0; f(\infty) = \infty,\ se\ c = 0$. Dentre algumas propriedades interessantes, podemos citar que a composta de duas homografias é uma homografia, que a derivada de uma homografia não se anula e que uma homografia possui uma inversa que também é uma homgrafia. Além disso, se $T \neq id$ é uma homografia, então T possui um ou dois pontos fixos, ou seja, pontos tais que $T(z_0) = z_0$; e dados dois ternos de pontos, distintos dois a dois, (z_1, z_2, z_3) e (w_1, w_2, w_3) pertencentes a $\overline{\mathbb{C}}$, existe uma única homografia T tal que $T(z_j) = w_j$, para $j = 1, 2, 3$. Mostra-se ainda que todo automorfismo do disco unitário centrado na origem **D** é a restrição de uma homografia a **D**.

- **Homeomorfismo:** Uma função $f: U \to V$ é dita um homeomorfismo se for bijetiva, contínua e possuir inversa também contínua. Observe que uma homografia define também um homeomorfismo de $\overline{\mathbb{C}}$ sobre $\overline{\mathbb{C}}$. Outros exemplos de homeomorfismos são de **D** no quadrado unitário em $\mathbb{C}$, e a construção da esfera de Riemann, que mostra que a esfera unitária de $\mathbf{R}^3$ é homeomorfa a $\overline{\mathbb{C}}$. Homeomorfismos são, portanto, mapeamentos que preservam as propriedades topológicas de um dado espaço. Grosseiramente falando, um homeomorfismo "estica e dobra" um objeto, dando-lhe uma nova forma. Um outro exemplo famoso é o fato de que o torus é, topologicamente falando, o mesmo objeto que uma xícara de café.



Resultados Básicos

A demonstração do Teorema do Mapeamento Conforme de Riemann requer outros importantes resultados. A demonstração explícita dos resultados mais conhecidos pode ser encontrada na bibliografia.

- **Lema de Schwarz:** $Seja\ f\colon \mathbf{D} \to \mathbb{C}\ uma\ função\ analítica, onde\ \mathbf{D} = \{z; |z| < 1\}. Suponhamos\ f(0) = 0\ e\ |f(z)| < 1\ para\ todo\ z\ \in \mathbf{D}. Então\ |f(z)| \le |z|, para$ *todo* $z\ \in \mathbf{D}\ e\ |f'(0)|\ \le 1. Além\ disto, se\ |f'(0)| = 1\ ou\ se\ |f(z_0)| = |z_0|\ para$ *algum* $z_0\ \in \mathbf{D} - \{0\}, então\ f(z) = \lambda\, z, onde\ |\lambda| = 1.$

- **Teorema de Hurwitz (Corolário)**:
  $Seja\ (f_n)_{n\ge1}\ uma\ sequência\ em\ \mathcal{M}(\boldsymbol{U})\ (meromorfas\ de\ \boldsymbol{U}, aberto\ conexo), tal$ *que* $f_n \to f\ \ \in \mathcal{M}(\boldsymbol{U}), uniformemente\ nas\ partes\ compactas\ de\ \boldsymbol{U}.\ Suponha$ *também*$z_0\ \in \boldsymbol{U}\ um\ polo\ (resp. zero)\ de\ ordem\ k \ge 1\ de\ f. Para\ todo\ r > 0,$ $suficientemente$ *pequeno, existe* $n_0 = n(r) \ge 1\ tal\ que\ se\ n \ge n_0,\ então\ f_n$ *possui k pólos (resp. zeros), contados com multiplicidade em* $D_r(z_0)$.

- **Teorema de Montel:**
  Um subconjunto de $\mathcal{H}(\boldsymbol{U})\ (holomorfas\ de\ \boldsymbol{U})$ é $uma\ família\ normal\ de\ funções$ *holomorfas se, e somente se, ele for localmente limitado.*

- **Teorema 1:**
  Valem as seguintes propriedades:
  (a) Qualquer automorfismo holomorfo de **D** *é uma homografia do tipo* $S(z)=\lambda \,.\frac{z- z_0}{1- \overline{z_0}\,.\, z}$
  (b) Dados z_1 *e* $z_2 \in \mathbf{D}$, *existe um único automorfismo holomorfo do disco unitário nele mesmo tal que* $S(z_1)=z_2$ *e* $S'(z_1) \in (0, +\infty)$.

- **Teorema 2:**
  Seja $(f_n)_{n\ge1}$ *uma sequência de funções univalentes em* $\mathcal{H}(\boldsymbol{U})$, *onde* $\boldsymbol{U} \subset \mathbb{C}$ *é aberto conexo. Suponhamos que* $f_n \to f$ *uniformemente nas partes compactas de* $\boldsymbol{U}$. *Então f é univalente ou constante.*
  Demonstração:
  Suponhamos por absurdo que f não seja nem univalente, nem constante. Ou seja, existem z_1, $z_2 \in \boldsymbol{U}$, *tais que* $z_1 \neq z_2$ *e* $f(z_1) = f(z_2) = w_0$. *Sejam* D_1 *e* D_2 *discos abertos, centrados, respectivamente, em* z_1 *e* z_2, *tais que seus fechos estão contidos em* $\boldsymbol{U}$, *não se intersectam e* $z = z_j$ *é a única solução da equação* $f(z) = w_0$ *em* $\overline{\mathbf{D}_j}$, *j= 1,2.*
  Pelo Corolário do Teorema de Hurwitz, podemos tomar n tal que se* $n \ge n^*$, *então a equação* $f_n(z) = w_0$ *possui pelo menos duas soluções, uma em* D_1 *e outra em* D_2. *Isso implica que* f_n *não é univalente, o que é uma contradição. Conclui-se daí que se f não é constante, então f é univalente.* ■

O Teorema de Riemann

Trabalharemos com o seguinte enunciado:

$Seja\ \boldsymbol{U}\ um\ subconjunto\ aberto\ e\ simplesmente\ conexo\ de\ \mathbb{C},\ tal\ que\ \boldsymbol{U} \neq \mathbb{C}. Dado\ z_0\ \in \boldsymbol{U}, existe\ um$ único $biholomorfismo\ f\colon \boldsymbol{U} \to \mathbf{D}, onde\ \mathbf{D}$ é $o\ disco\ aberto\ de\ raio\ unitário\ centrado\ na\ origem, tal\ que\ f(z_0) = 0\ e\ f'(z_0) \in (0, +\infty).$

Ressaltemos a importância desse resultado. Dado que um conjunto é aberto e simplesmente conexo, ele será holomorficamente equivalente à qualquer outro conjunto aberto e simplesmente conexo. Conjuntos aparentemente distintos são equivalentes por uma função que satisfaz as fortes condições de holomorfia. Um conjunto limitado pode ser equivalente à um semi-plano, por exemplo.

Por outro lado, conjuntos aparentemente semelhantes não possuem tal biholomorfismo. Denotemos por $A(r_1, r_2) = \{z;\ r_1 < |z| < r_2\}$, onde $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$. Dividindo em quatro tipos, temos 1º $r_1 = 0, r_2 = \infty$; 2º $0 < r_1 < r_2 < +\infty$; 3º $r_1 = 0, r_2 < +\infty$; 4º $r_1 > 0, r_2 = +\infty$.

Primeiramente, anéis do 4º tipo são holomorficamente equivalentes a anés do 3º tipo, pela homografia $h(z) = 1/z$, e anéis do 3º tipo são equivalentes entre si. Logo, vamos considerar apenas os 3 primeiros tipos.

Podemos provar também que se dois anéis são holomorficamente equivalentes e se englobam nesses três tipos, eles pertencerão ao mesmo tipo.

Além disso, se dois anéis do 2º tipo $A(r_1, r_2)$ e $A(r'_1, r'_2)$ forem holomorficamente equivalentes, a condição necessária e suficiente para que isso ocorra, que é $\frac{r_1}{r_2} = \frac{r'_1}{r'_2}$, deve ter sido satisfeita.

Note, portanto, que a condição de equivalência holomorfa é muito mais restitiva que a de homeomorfismo, que evidentemente existe para dois anéis do 2º tipo. A partir dessas comparações, podemos perceber a importância e a não-trivialidade do enunciado do Teorema de Riemann

O disco unitário, portanto, é muito mais "próximo" de um semi-plano que dois anéis do 2º tipo que não satisfaçam a condição acima apresentada, ou seja, que possuam excentricidades distintas.

Além disso, a caracterização de abertos conexos de $\overline{\mathbb{C}}$, módulo homeomorfismos, consiste em um dos problemas fundamentais da topologia de dimensão dois. Ou seja, obter um certo conjunto de modelos, tais que não haja homeomorfismos entre eles e de modo que qualquer conjunto aberto conexo de $\overline{\mathbb{C}}$ seja homeomorfo à algum desses modelos.

O Teorema de Riemann nos permite resolver um problema mais simples, que consiste em caracterizar analiticamente conjuntos abertos e simplesmente conexos de $\overline{\mathbb{C}}$. Tal resultado fornece um método de classificação em três grupos. O único conjunto holomorficamente equivalente à $\overline{\mathbb{C}}$ é o próprio $\overline{\mathbb{C}}$. Se o conjunto for equivalente à $\mathbb{C}$, então podemos afirmar que tal conjunto é da forma $U = \overline{\mathbb{C}} - \{z_0\}$, para algum $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$. Finalmente, a terceira classificação nos remete diretamente ao enunciado do Teorema, pois refere-se aos abertos simplesmente conexos equivalentes à **D**.

Demonstração:

Consideraremos a seguinte família $\mathcal{F}$ de funções holomorfas $f\colon \boldsymbol{U} \to \mathbb{C}$, tais que:

(i) $f(\boldsymbol{U}) \subset \mathbf{D}$, $f(z_0) = 0$ *e* $f'(z_0) \in (0, +\infty)$ (*sendo* z_0 *um ponto fixado de* $\boldsymbol{U}$).

(ii) f é *univalente*.

Prova da unicidade: Se houvesse um segundo mapa conforme satisfazendo a hipótese, seria possível obter um automorfismo holomorfo T:**D** → **D**, compondo um mapa conforme com o inverso do segundo. Assim, T(0) = 0 e T'(0) ∈ $(0, +\infty)$. Pelo **Teorema 1**, T= id, logo os mapas são iguais.

Prova da existência:

$\mathcal{F} \neq \emptyset$: Seja $z_1 \in \mathbb{C} - \boldsymbol{U}$. Como $\boldsymbol{U}$ é simplesmente conexo, pode-se definir um ramo do logaritmo de $z - z_1$ em $\boldsymbol{U}$, L: $\boldsymbol{U} \to \mathbb{C}$. Temos então, exp(L(z))= $z - z_1$ para todo z em $\boldsymbol{U}$. Assim, se L(z) = L(z'), z = z'. Logo L é univalente.

Agora, seja $w = L(z) \in L(\boldsymbol{U})$, $z \in \boldsymbol{U}$. Afirmamos que $w + 2\pi i \notin L(\boldsymbol{U})$, pois teríamos $w + 2\pi i = z' \in L(\boldsymbol{U})$, o que implicaria $z'-z_1 = \exp(w + 2\pi i) = \exp(w) = z - z_1$, ou seja, $z = z'$ e $w + 2\pi i = w$, o que é uma contradição. Logo, se D é um disco contido em $L(\boldsymbol{U})$, $\{z + 2\pi i; z \in D\}$ é um disco contido em $\mathbb{C} - L(\boldsymbol{U})$, que consequentemente possui interior não-vazio.

Tomemos agora um disco $D_r(w_o) \subset \mathbb{C} - L(\boldsymbol{U})$, $r > 0$. A homografia $h(w) = \frac{r}{w-w_0}$ é tal que $h(\bar{\mathbb{C}} - D_r(w_0)) = \mathbf{D}$. Como $L(\boldsymbol{U}) \subset \bar{\mathbb{C}} - D_r(w_0)$, vem que $h(L(\boldsymbol{U})) \subset \mathbf{D}$. Por outro lado, se $s_0 = h\big(L(z_0)\big)$, onde $z_0 \in \boldsymbol{U}$, então a homografia $g(s) = \frac{(s-s_0)}{(1-\bar{s}_0\, s)}$ é tal que $g(\mathbf{D}) = \mathbf{D}$ e $g(s_0) = 0$. Coloquemos $f_1 = g \circ h \circ L$, univalente por construção, com $f_1(\boldsymbol{U}) \subset \mathbf{D}$ e $f_1(z_0) = 0$. Suponhamos que $f'_1(z_0) = \rho e^{i\theta}$, onde $\rho > 0$. Basta agora tomar $f(z) = e^{-i\theta} \cdot f_1(z)$ e temos $f \in \mathcal{F}$.

Existe $f \in \mathcal{F}$ *tal que* $f(\boldsymbol{U}) = \mathbf{D}$: Por definição, a família $\mathcal{F}$ é uniformemente limitada, pois $|f(z)| < 1$, para toda $f \in \mathcal{F}$ e todo $z \in \boldsymbol{U}$. Pelo *Teorema de Montel*, $\mathcal{F}$ é uma família normal, ou seja, seu fecho em $\mathcal{H}(\boldsymbol{U})$ é compacto. Queremos mostrar que seu fecho $\bar{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \cup \{0\}$, onde 0 é a função constante $0(z) = 0$, $z \in \boldsymbol{U}$. Esse resultado deriva do *Teorema 2*.

Se $f \in \bar{\mathcal{F}} - \mathcal{F}$, então existe sequência $(f_n)_{n\geq 1}$ em $\mathcal{F}$ tal que $f_n \xrightarrow{\text{u.p.c.}} f$ (converge uniformemente nas partes compactas). Se f for constante, então $f \equiv 0$, pois $f_n(z_0) = 0$ para todo $n \geq 1$. Se f for univalente, temos $f(z_0) = \lim_{n\to\infty} f_n(z_0) = 0$ e $f'(z_0) = \lim_{n\to\infty} f'_n(z_0) \in [0, +\infty)$. Como f é univalente, $f'(z_0) \neq 0$, logo $f'(z_0) \in (0, +\infty)$. Basta agora provarmos que $f(\boldsymbol{U}) \subset \mathbf{D}$. Do *Corolário do Teorema de Hurwitz*, caso $f(\boldsymbol{U}) \cap (\mathbb{C} - \mathbf{D}) \neq \emptyset$, teríamos $z_1 \in \boldsymbol{U}$ tal que $f(z_1) = w_1 \notin \mathbf{D}$. Existiria $n_0 \geq 1$ tal que se $n \geq n_0$, existiria ao menos uma solução para $f_n(z) = w_1$ em $\boldsymbol{U}$. Logo, $f_n \notin \mathcal{F}$, contradição. Portanto $\bar{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \cup \{0\}$.

Consideremos agora a função $\varphi: \bar{\mathcal{F}} \to [0, +\infty)$, $\varphi(f) = f'(z_0)$. Se $(f_n)_{n\geq 1}$ for uma sequência em $\bar{\mathcal{F}}$ tal que $f_n \xrightarrow{u.p.c} f$, então $f'_n \xrightarrow{u.p.c} f'$, o que implica na continuidade de $\varphi(f)$, pois $\varphi(f_n) \to \varphi(f)$.

Logo, $\varphi(\bar{\mathcal{F}})$ é compacto, uma vez que $\bar{\mathcal{F}}$ é compacto e φ contínua. Conclui-se portannto que existe f_0 tal que $\varphi(f_0) = \sup\{\varphi(f),\ f \in \bar{\mathcal{F}}\}$. Como $\mathcal{F} \neq \emptyset$, $f'_0(z_0) > 0$. Logo $f_0 \in \mathcal{F}$.

Afirmamos que $f_0(\boldsymbol{U}) = \mathbf{D}$: Suponha que $f_0(\boldsymbol{U}) = V \neq \mathbf{D}$. Considere $w_0 \in \mathbf{D} - V$. Uma vez que $f_0(z_0) = 0 \in V$ e que V é simplesmente conexo, pois f_0 é um homemomorfismo, existirá uma função holomorfa univalente $h: V \to \mathbf{D}$ com $h(0) = 0$, $h'(0) \in (1, +\infty)$. Ao compor $g = h \circ f_0$, claramente $g \in \mathcal{F}$ e $g'(z_0) > f_0{}'(z_0)$, o que implicará na contradição do conceito de supremo.

Consideremos primeiramente a homografia $T(z) = \frac{z-w_0}{1-\overline{w_0}\cdot z}$. Como $T(\mathbf{D})=\mathbf{D}$ e $V \subset \mathbf{D}$, temos $T(V) \subset \mathbf{D}$. Por outro lado, como $T(V)$ é simplesmente conexo e $0 = T(w_0) \notin T(V)$, podemos definir um ramo do logaritmo em $T(V)$, digamos L. Assim, podemos definir $h_1(z) = \exp\left(\frac{1}{2}L\big(T(z)\big)\right)$, um ramo da raíz quadrada de T em V. Isto implica que essa função é univalente e $h_1(V) \subset \mathbf{D}$. Com efeito, se $z_1, z_2 \in V$ *e* $h_1(z_1) = h_1(z_2)$, elevando ao quadrado teríamos $T(z_1) = T(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2$. Além disso, $|h_1(z)|^2 = |T(z)| < 1$, o que implica $|h_1(z)| < 1$.

Coloquemos $h = S \circ h_1$, onde $S(w) = \lambda \cdot \frac{w-h_1(0)}{1-\overline{h_1(0)}\cdot w}$, sendo $\lambda = -\frac{|h_1(0)|}{h_1(0)}$. Como $|\lambda| = 1$, $h(V) = S \circ h_1(V) \subset S(\mathbf{D}) = \mathbf{D}$. Além disso, h é univalente e $h(0) = 0$.

Temos ainda $h'(0) = S'\big(h_1(0)\big) \cdot h'_1(0) = \frac{\lambda}{1-|h_1(0)|^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot h_1(0) \cdot \frac{T'(0)}{T(0)} = \frac{1+|w_0|}{2\sqrt{|w_0|}}$. Finalmente, como $|w_0| < 1$, segue que $1 + |w_0| > 2\sqrt{|w_0|}$, logo $h'(0) > 1$, como queríamos. ■

Conclusões

A Análise Complexa é certamente um dos ramos da matemática mais repletos de resultados intrigantes e não-elementares. Vimos durante o projeto que a condição de holomorfia, normalmente adotada para diversos outros resultados, é uma condição muito restritiva e nem sempre trivial de se obter.

Entretanto, o estudo dessas funções nos rende resultados extremamente importantes e curiosos. Por exemplo, uma técnica para resolver integrais reais consiste em resolvê-la primeiramente no plano complexo, para que possamos tomar proveito das propriedades de funções de variável complexa.

O estudo do Teorema de Riemann nos forneceu uma compreensão ainda maior sobre os resultados obtidos ao considerarmos funções de variável complexa. Foi possível também desenvolver uma compreensão mais apurada sobre equivalências conformes e suas aplicações para caracterizar os subconjuntos abertos e simplesmente conexos de $\overline{\mathbb{C}}$.

Durante o desenvolvimento do projeto, muitos outros resultados foram estudados, a fim de desenvolver a afinidade do orientado com o campo estudado.

Como conseqüência de tal trabalho, é possível afirmar que, além de um conhecimento razoavelmente aprofundado em Análise Complexa, o orientado desenvolveu sua capacidade de estudo, raciocínio lógico-matemático e de realizar demonstrações rigorosas. Tais habilidades são amplamente utilizadas ao fazermos uma compreensão mais detalhada e aprofundada de resultados obtidos e teoremas existentes, não apenas relacionados à Matemática, mas também a diversas outras Ciências Exatas.

Referências

1 - LIMA, Elon Lages . **Análise Real, Volume I.** Projeto Euclides, 2001

2 – SOARES, Marcio. **Cálculo de uma Variável Complexa**, SBM, 2001

3 – LINS NETO, Alcides. **Funções de Uma variável Complexa**, Projeto Euclides, 2008