

## DEFORMAÇÕES INFINITESIMAIS DE EQUAÇÕES DE EULER

**Aluno: Thiago Barbosa Guerreiro**

**Orientador: George Svetlichny**

### Apresentação

Durante o período da iniciação científica estudamos alguns formalismos da mecânica clássica. Este estudo foi realizado inicialmente através da leitura do livro de V. I Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics* [1].

Após essa primeira etapa, motivados por algumas questões, partimos para tentar solucionar um problema original, sobre transformações de equações diferenciais que vêm de um princípio variacional, e essas tentativas resultaram na solução desse problema, escrita em um artigo a ser publicado em [arxiv.org/](http://arxiv.org/), repositório de pre-prints da internet.

### O estudo do Arnold

O livro [1] é uma referência quando se trata de aspectos mais matemáticos da física, e em particular, da mecânica clássica. Além disso, durante o primeiro semestre da iniciação, o aluno estava cursando mecânica analítica, e esse livro representa um excelente complemento para o curso dessa disciplina. Por essas razões o escolhemos como fonte inicial de estudos.

Como a idéia do projeto era estudar aspectos simpléticos da mecânica clássica, e posteriormente da mecânica quântica, começamos com a parte III do livro, dedicada à mecânica Hamiltoniana. Foi feita então uma leitura detalhada sobre formas diferenciais, que estão contidas no capítulo 7. Combinado com a leitura, resolvemos os exercícios propostos, discutindo suas soluções, o que acabou sendo uma oportunidade para que o aluno ganhasse noções de geometria diferencial.

Seguido do capítulo 7, passamos ao 8, que trata do formalismo simplético em si. Sempre procurando resolver o máximo de exercícios possível, foram estudadas as características da mecânica Hamiltoniana que a tornam dotada de uma estrutura simplética, e a álgebra de Lie de campos vetoriais e de funções no espaço de fase.

Paralelamente à leitura rigorosa desses capítulos, o aluno procurou ler, de uma maneira mais informal, a parte II do livro, que fala sobre o formalismo Lagrangiano.

Esses estudos de [1] inspiraram ao longo do primeiro semestre da iniciação a proposta de algumas perguntas e idéias, que o aluno levou ao orientador. Passamos então a nos dedicar à essas perguntas, o que deu um tom mais sério à iniciação, de certa forma a transformando de um estudo dirigido a uma pesquisa científica.

### As perguntas

A primeira questão que surgiu está relacionada à mecânica Lagrangiana. Dada uma equação diferencial qualquer, quando ela vem de um princípio variacional e qual é a Lagrangiana desse princípio? Esse problema é conhecido como problema inverso da Lagrangiana, e foi solucionado da maneira mais geral possível em [2], por Anderson e Duchamp.

Nesse artigo, os autores estudam o problema de um ponto de vista global, chegam a condições que uma equação diferencial deve satisfazer para que possa ser obtida por um princípio variacional, e ainda fornecem a forma da Lagrangiana.

Essas condições são as chamadas equações de Anderson-Duchamp, que no caso de equações diferenciais de segunda ordem em funções de uma única variável

$$T(x, y, y', y'') = 0$$

se reduzem a uma única equação

$$\frac{\partial T}{\partial y'} - \frac{d}{dx} \frac{\partial T}{\partial y''} = 0$$

(\*)

que, se escrevermos explicitamente se desdobra em duas condições

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y''^2} = 0 \quad (\text{i})$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y''} = \frac{\partial T}{\partial y'} - y' \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial y''} - y'' \frac{\partial^2 T}{\partial y' \partial y''} \quad (\text{ii})$$

Visto isso, uma segunda questão proposta, porém, que não levamos muito a fundo foi, olhando para a equação (\*), vimos que ela apresenta uma forma muito similar à de uma equação de Euler propriamente dita.

Para uma Lagrangiana

$$L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, y') \mapsto L(x, y, y')$$

a equação de Euler correspondente seria

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} = 0$$

Será que essa similaridade na forma das duas equações é consequência de algum fato interessante, ou é pura coincidência?

Uma outra questão, que é para nós a principal, diz respeito a transformação de equações diferenciais. Que condições devem existir sobre certas transformações infinitesimais para que, dada uma equação diferencial de segunda ordem em uma variável, que vem de um princípio variacional, possamos transformar sua solução e a própria equação, de forma que o resultado dessas transformações seja outra equação que também venha de um princípio variacional?

Essa é a pergunta original, a qual nos dedicamos a resolver, que resultou no artigo a ser colocado no ArXiv. Vamos passar agora a uma descrição detalhada desse problema.

### O problema das transformações

Para formular o problema de maneira adequada, foi preciso estudar o chamado cálculo de jatos. Esse estudo foi realizado a partir da leitura de artigos e notas da autoria do próprio orientador, em particular de [3], e do livro [4].

Começamos com o caso mais simples, uma função de uma variável

$$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto y(x)$$

e definimos, respectivamente, os chamados jato e tangente de  $y$  de segunda ordem como

$$j^2(y) = (y(x), y'(x), y''(x))$$

$$\tau^2(y) = (x, j^2(y))$$

O espaço de jatos de segunda ordem é denotado por

$$J^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

e uma subvariedade no espaço de jatos de uma função  $y$  é igual à imagem da tangente de  $y$ , e é escrita por

$$\Gamma(j^2(y))$$

Uma expressão diferencial também de segunda ordem é

$$T : J^2(R, R) \rightarrow R$$

e para a equação diferencial escrevemos

$$T \circ j^2(y) = 0$$

O problema, se divide em duas partes. Primeiro, queremos deformar as soluções das equações diferenciais de Euler, e queremos as condições sobre essas deformações para que a função deformada continue sendo solução da equação de Euler em primeira ordem.

A segunda parte diz respeito a deformação da equação diferencial em si. Queremos poder deformar as equações diferenciais de tal maneira que a equação deformada resultante também seja uma equação de Euler em primeira ordem. Em outras palavras, queremos encontrar as simetrias das condições de Anderson-Duchamp para o caso de equações lineares de segunda ordem em uma variável.

Em termos mais precisos:

*Primeira parte:* Seja uma deformação infinitesimal

$$\Phi_t : R \times J^2(R, R) \rightarrow J^2(R, R)$$

com a forma

$$\Phi_t(\Gamma(j^2(y))) = \Gamma(j^2(\bar{y})) = (x + t\xi(x, y, y'), y + t\eta^0(x, y, y'), y' + t\eta^1(x, y, y'), y'' + t\eta^2(x, y, y'))$$

onde os eta's e os xi's não dependem de  $y''$  devido a um teorema em [4] e sendo que

$$\eta^{\ell+1} = D\eta^\ell - y^{\ell+1}D\xi$$

como consequência de outro teorema em [3], que preserva a estrutura do espaço de jato.

Quais as condições sobre essa deformação para que dada uma solução  $y$  de uma equação diferencial  $T$ , a função deformada satisfaça

$$T \circ j^2(\bar{y}) = 0 + O(t^2)$$

*Segunda parte:* Como mencionado antes, queremos encontrar as simetrias das condições de Anderson-Duchamp (i) e (ii). Como uma equação diferencial é uma função do espaço de jatos nos reais, a deformação infinitesimal dessa equação deve lidar com o espaço

$$J^2(J^2(R, R), R)$$

e afim de simplificar o problema, propomos redefinir as variáveis como

| $J^2(J^2(R, R), R)$ | $J^2(R^4, R)$ |
|---------------------|---------------|
| $T$                 | $Y$           |
| $x$                 | $x_1$         |
| $y$                 | $x_2$         |
| $y'$                | $x_3$         |
| $y''$               | $x_4$         |

Tabela – Dicionário de Variáveis

Assim, a deformação infinitesimal é definida como

$$\Xi_t : R \times J^2(R^4, R) \rightarrow J^2(R^4, R)$$

$$\Xi_t(x_1, \dots, x_4, Y) := (x_1 + t\xi_1(x_1, \dots, x_4, Y), \dots, x_4 + t\xi_4(x_1, \dots, x_4, Y), Y + t\eta^0(x_1, \dots, x_4, Y))$$

e as equações (i) e (ii) são reescritas

$$\begin{aligned} F_1(x_1, \dots, x_4, Y) &= 0 \\ F_2(x_1, \dots, x_4, Y) &= 0 \end{aligned}$$

onde

$$F_1(x_1, \dots, x_4, Y) := Y^{44}$$

$$F_2(x_1, \dots, x_4, Y) := Y^3 - Y^{14} - x_3 Y^{24} - x_4 Y^{34}$$

e índice superior em Y significa derivada parcial com relação à variável daquele índice.

Procuramos então as condições sobre essa deformação infinitesimal para que

$$F_1 \circ \Xi_t(x_1, \dots, x_4, Y) = 0$$

$$F_2 \circ \Xi_t(x_1, \dots, x_4, Y) = 0$$

em primeira ordem em t, sabendo que [3], para primeira ordem isso significa

$$\frac{\partial F_s}{\partial x_i} \xi_i + \frac{\partial F_s}{\partial Y^\alpha} \eta^\alpha$$

e que

$$\eta^i = D^i \eta^0 - Y^\ell D^i \xi_\ell$$

$$\eta^{ij} = D^j \eta^i - Y^{i\ell} D^j \xi_\ell$$

onde soma-se sobre índices repetidos.

Resolver essa segunda parte foi o mais trabalhoso, pois era necessário escrever as duas condições de forma totalmente explícita em termos dos monômios linearmente independentes em Y e suas derivadas. Por isso desenvolvemos algumas planilhas em maple para simplificar o problema.

### Conclusões e direções futuras

No final, chegamos à resposta da primeira etapa, descrita acima, e às simetrias das equações de Anderson-Duchamp para o caso em questão. Todos os cálculos foram descritos na forma de um artigo que deverá ser publicado em breve no arXiv.

Para o futuro, planejamos continuar estudando os formalismos da mecânica. Continuará sendo feito um trabalho que procure sempre despertar novos questionamentos e que levante dúvidas que estão de fora dos livros textos. Afinal, toda ciência se faz de perguntas.

### Referências

- 1 - Arnold, V. I. **Mathematical Methods of Classical Mechanics**. Graduate Texts in Math., Vol. 60, Springer-Verlag, New York and Berlin, 1978.
- 2 - I. M. Anderson, T. Duchamp, On the existence of global variational principles. **Amer. J. Math.** 102 (1980), 781-868.
- 3 - Otterson P., Svetlichny G., On derivative-dependent infinitesimal deformations of differentiable maps, **J. Differential Equations**, 36 (1980), 270-294.
- 4 - Olver, P.J. **Applications of Lie Groups to Differential Equations**. 2 .ed. , Springer, 1993.