

Modelo de Elementos Finitos Axisimétricos para Análise de Cascas Finas e Espessas

Aluno: João Luiz Almeida de Souza Ramos
Orientador: Carlos Alberto Almeida

Introdução

O comportamento de cascas axisimétricas, sob carregamentos de pressão e forças concentradas e também diversas formas de condições de contorno, é estudado neste trabalho considerando-se o método dos elementos finitos. O modelo utiliza os polinômios de Lagrange na aproximação do campo de deslocamentos ao longo do comprimento considerados os valores nodais como variáveis de estado. As componentes de tensões no elemento são avaliadas a partir destes valores nodais e gráficamente apresentadas em um ambiente Matlab.

Este estudo tem a sua importância associada à interpretação física da solução numérica fornecida que, adequadamente considerada na formulação do modelo numérico, representa uma importante redução no custo computacional associado ao esforço computacional envolvido na solução com o método dos elementos finitos utilizado, por não exigir uma larga base de polinômios de aproximação.

Com este objetivo foi desenvolvido um programa em linguagem C que permite simular vasos de pressão de paredes finas e espessas submetidos a carregamentos axiais e radiais concentrados, sem a necessidade de tratamento numérico diferenciado considerando-se diversas espessuras, admitindo-se também diversas condições de contorno na casca. A análise dos resultados numéricos obtidos é realizada através da comparação com a solução analítica disponível na literatura para apenas alguns casos de cascas finas, bem como na comparação com os resultados de outras cascas utilizando diferentes malhas de discretização de elementos finitos.

Formulação Analítica

O equilíbrio de um corpo é verificado quando qualquer uma de suas partições está igualmente em equilíbrio, Harry-2004. Linearizando-se as funções de tensões por suas derivadas e sabendo que o sistema possui simetria axial a seguinte equação de equilíbrio é obtida para um sólido cilíndrico, Fig. 1:

$$\frac{\partial \mathbf{s}_r}{\partial r} + \frac{\mathbf{s}_r - \mathbf{s}_q}{r} = 0 \quad (1)$$

em função das componentes radiais e circunferenciais das tensões normais. Esta equação é expressa em função das componentes radial W e longitudinal U dos deslocamentos na casca utilizando-se as constitutivas para um material elástico, homogêneo e isotrópico, a lei de Hooke :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \frac{dW}{dr} = \frac{1}{E} [\mathbf{s}_r - \mathbf{n}(\mathbf{s}_q + \mathbf{s}_z)]; \\ \mathbf{e}_q &= \frac{W}{r} = \frac{1}{E} [\mathbf{s}_q - \mathbf{n}(\mathbf{s}_r + \mathbf{s}_z)]; \\ \mathbf{e}_z &= \frac{dU}{dz} = \frac{1}{E} [\mathbf{s}_z - \mathbf{n}(\mathbf{s}_q + \mathbf{s}_r)]; \end{aligned} \quad (2)$$

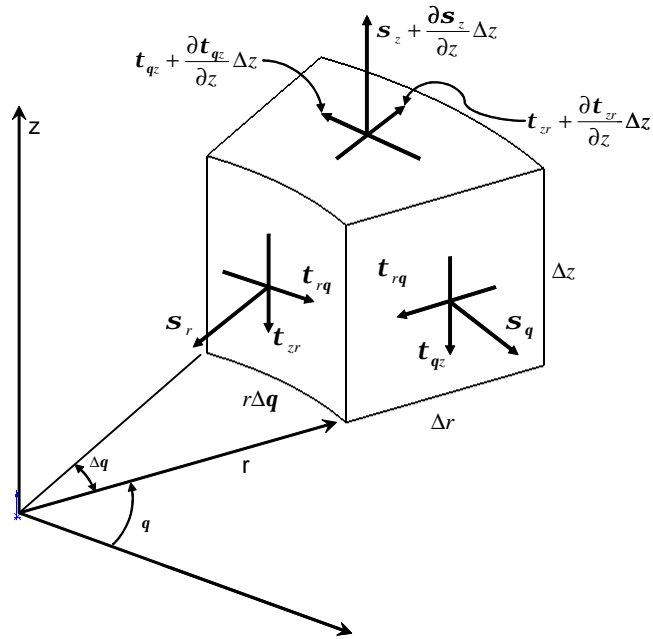


Figura 1 - Tensões no Elemento de Casca Cilíndrica

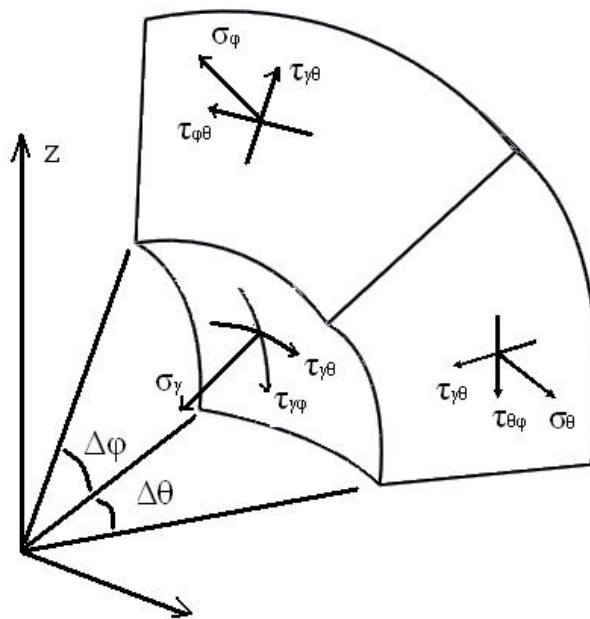


Figura 2 - Tensões no Elemento de Casca Esférica

e as equações de compatibilidade geométrica para deformações infinitesimais em coordenadas cilíndricas, Harry-2004. Desta forma a equação homogênea em (1) resulta, escrita em função do deslocamento radial W ,

$$\frac{d^2W}{dR^2} + \frac{1}{r} \frac{dW}{dR} - \frac{W}{R^2} = 0 \Rightarrow W(r) = A_1 R + \frac{B_1}{R} \quad (3)$$

onde, considerando-se os carregamentos de pressão interna p_i e pressão externa p_o , resulta

$$A_1 = \frac{(1-\mathbf{n})}{E} \left[p_i \frac{1}{(r_o/r_i)^2 - 1} + p_o \frac{1}{(r_i/r_o)^2 - 1} \right]$$

$$B_1 = \frac{(1+\mathbf{n})}{E} \left[p_i \frac{1}{(1/r_i)^2 - (1/r_o)^2} + p_o \frac{1}{(1/r_o)^2 - (1/r_i)^2} \right]$$
(4)

Voltando-se as equações de compatibilidade geométrica e constitutiva com os resultados dos deslocamentos apresentados acima, resulta nas seguintes equações que descrevem as tensões:

$$\mathbf{s}_r = -p_i \frac{1}{(r_o/r_i)^2 - 1} \left((r_o/r_i)^2 - 1 \right) + p_o \frac{1}{(r_o/r_i)^2 - 1} \left((r_o/r_i)^2 - (r_o/r)^2 \right)$$

$$\mathbf{s}_q = +p_i \frac{1}{(r_o/r_i)^2 - 1} \left((r_o/r_i)^2 + 1 \right) - p_o \frac{1}{(r_o/r_i)^2 - 1} \left((r_o/r_i)^2 + (r_o/r)^2 \right)$$
(5)

Nesta solução utilizou-se a condição do cilindro espesso livre de quaisquer condições de fixação. As funções que compõe esta solução são empregadas na formulação como funções base do espaço de funções da solução numérica por elementos finitos.

Agora, considerando-se o caso de uma esfera espessa temos, para as componentes de tensões apresentadas na Fig. 2, a seguinte equação de equilíbrio, representativa das forças na direção radial:

$$r \left[r \frac{\partial \mathbf{s}_r}{\partial r} + r(2\mathbf{s}_r - \mathbf{s}_f - \mathbf{s}_q) \right] = 0;$$
(6)

Procedendo-se com raciocínio análogo ao apresentado para o corpo cilíndrico obtém-se, para as equações de compatibilidade geométrica e constitutivas

$$\mathbf{e}_r = \frac{dW_r}{dr} = \frac{1}{E} [\mathbf{s}_r - \mathbf{n}(\mathbf{s}_q + \mathbf{s}_f)]$$

$$\mathbf{e}_q = \frac{W}{r} = \frac{1}{E} [\mathbf{s}_q - \mathbf{n}(\mathbf{s}_r + \mathbf{s}_f)]$$

$$\mathbf{e}_f = \frac{W}{r} = \frac{1}{E} [\mathbf{s}_f - \mathbf{n}(\mathbf{s}_q + \mathbf{s}_r)]$$
(7)

que substituídas na equação (6) resulta na seguinte equação diferencial para o único deslocamento radial no sistema coordenado esférico considerado, Harry-2004,

$$r \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial W}{\partial r} - 2 \frac{W}{r} = 0 \Rightarrow W(r) = A_2 r + \frac{B_2}{r^2}$$
(8)

onde

$$A_2 = \frac{(1-2\mathbf{n})}{E(r_o^3 - r_i^3)} [p_i r_i^3 - p_o r_o^3]$$

$$B_2 = \frac{(1+\mathbf{n})}{2E} \frac{r_i^3 r_o^3}{(r_o^3 - r_i^3)} [p_i - p_o]$$
(9)

Conforme proposição deste estudo, a solução numérica a ser considerada para os deslocamentos na direção radial resulta da superposição das duas soluções apresentadas, para a esfera e para o cilindro. Desta forma temos,

$$W(r) = W_0 + \frac{W_1}{R} + W_2 R + \frac{W_3}{R^2} \quad (10)$$

Formulação Matemática da Teoria Geral de Cascas

Cascas são definidas como a região delimitada por duas superfícies paralelas. Para representá-las matematicamente utiliza-se a superfície média como referência de coordenadas e deslocamentos, sendo esta superfície o lugar geométrico dos pontos equidistantes das duas superfícies consideradas. A espessura da casca é definida pela distância entre as superfícies tomada ao longo da direção normal às superfícies. Desta forma, da caracterização da superfície média e da espessura, define-se matematicamente a casca.

- **Superfície média**

Para a definição geométrica deste, utilizou-se dois referenciais ortogonais. Um global, tridimensional e outro local bidimensional de coordenadas curvilíneas longitudinal (\mathbf{x}) e circunferência (\mathbf{q}), Fig. 3. Assim, caracterizam-se as coordenadas globais através das definições locais como na expressão:

$$\hat{X}(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = f_1(\mathbf{x}, \mathbf{q})\hat{e}_1 + f_2(\mathbf{x}, \mathbf{q})\hat{e}_2 + f_3(\mathbf{x}, \mathbf{q})\hat{e}_3 \quad (11)$$

onde $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ são os vetores da base canônica do referencial global.

Para a superfície média axissimétrica, a cada coordenada \mathbf{x} na casca tem-se um círculo e, portanto, reescrevendo \hat{X} obtém-se

$$\hat{X}(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = r(\mathbf{x})\cos(\mathbf{q})e_1 + r(\mathbf{x})\sin(\mathbf{q})e_2 + z(\mathbf{x})e_3 \quad (12)$$

onde $r(\mathbf{x})$ e $z(\mathbf{x})$ são as coordenadas que definem a geratriz da superfície média do corpo axissimétrico, Fig. 3.

De considerações geométricas obtém-se a variação do comprimento do vetor posição ds e os raios principais de curvatura R_1 e R_2 na superfície média da casca, Harry-2004, da equação:

(Melhorando a nomenclatura: $s' = \frac{ds}{d\mathbf{x}}, r' = \frac{dr}{d\mathbf{x}}, z' = \frac{dz}{d\mathbf{x}}$.)

$$\left(\frac{ds}{d\mathbf{x}}\right)^2 = \left(\frac{dr(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}}\right)^2 + \left(\frac{dz(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}}\right)^2 \quad (13)$$

$$R_1 = \frac{s'^3}{r''z' - z''r'} \quad (14)$$

$$R_2 = \frac{s'r}{z'} \quad (15)$$

onde utiliza-se a nomenclatura $s' = \frac{ds}{d\mathbf{x}}, r' = \frac{dr}{d\mathbf{x}}, z' = \frac{dz}{d\mathbf{x}}$.

Para a descrição da casca é acrescentado ao referencial local uma coordenada na direção perpendicular à superfície média da casca ζ . Considerando a casca de espessura h , define-se a coordenada local $T = \frac{h}{2}z$

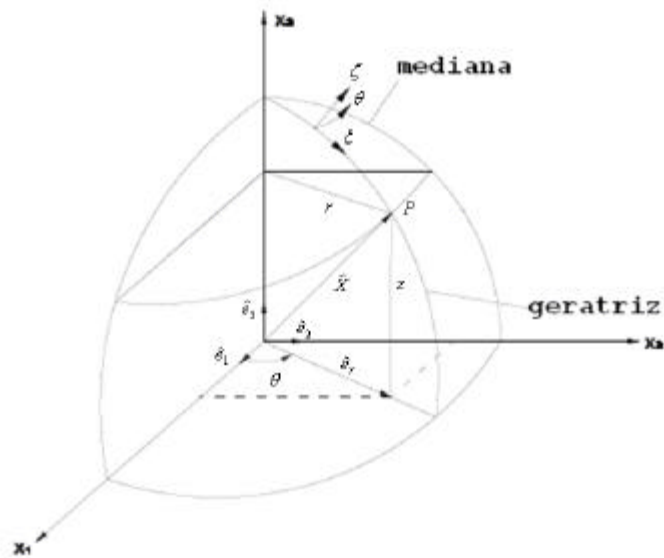


Figura 3 - Sistemas de Coordenadas em Uma Casca Axissimétrica

- **Deformações e Deslocamentos**

Os deslocamentos da casca axissimétrica nas direções locais $(\mathbf{x}, \mathbf{q}, \mathbf{z})$ são, respectivamente, U_1, U_2 e W . Desta forma as seis componentes de deformações, três lineares e três angulares, podem ser escritas na seguinte forma, Harry-2002,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_{xx} &= \frac{1}{s' \left(1 + \frac{T}{R_1}\right)} \left(\frac{\partial U_1}{\partial \mathbf{x}} + \frac{U_2}{r} \frac{\partial s'}{\partial \mathbf{q}} + \frac{s'W}{R_1} \right) = \frac{1}{s' \left(1 + \frac{T}{R_1}\right)} \left(\frac{\partial U_1}{\partial \mathbf{x}} + \frac{s'W}{R_1} \right) \\
 \mathbf{e}_{qq} &= \frac{1}{r \left(1 + \frac{T}{R_2}\right)} \left(\frac{\partial U_2}{\partial \mathbf{q}} + \frac{U_1}{s'} r' + \frac{rW}{R_2} \right) = \frac{1}{r \left(1 + \frac{T}{R_2}\right)} \left(\frac{U_1}{s'} r' + \frac{rW}{R_2} \right) \\
 \mathbf{e}_{zz} &= \frac{\partial W}{\partial T}
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\mathbf{g}_{xq} = \frac{r \left(1 + \frac{T}{R_2}\right)}{s' \left(1 + \frac{T}{R_1}\right)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{U_2}{r \left(1 + \frac{T}{R_2}\right)} \right) + \frac{s' \left(1 + \frac{T}{R_1}\right)}{r \left(1 + \frac{T}{R_2}\right)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{U_1}{s' \left(1 + \frac{T}{R_1}\right)} \right) = 0$$

$$\mathbf{g}_{xz} = \frac{1}{s' \left(1 + \frac{T}{R_1}\right)} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{x}} + s' \left(1 + \frac{T}{R_1}\right) \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{U_1}{s' \left(1 + \frac{T}{R_1}\right)} \right) \quad (17)$$

$$\mathbf{g}_{qz} = \frac{1}{r \left(1 + \frac{T}{R_2}\right)} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}} + r \left(1 + \frac{T}{R_2}\right) \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{U_2}{r \left(1 + \frac{T}{R_2}\right)} \right) = 0$$

Formulação Numérica

Utilizando-se o método dos elementos finitos, Bathe-1996, considerou-se a partição do contínuo em elementos finitesimais de geometria compatível ao sistema coordenado da casca, neste caso casca com simetria axial, aos quais são impostas condições de compatibilidade, constitutiva e de equilíbrio, que descrevem as variáveis desejadas. Como base teórica do método, usualmente, utiliza-se um conjunto de funções para descrever os campos de deslocamentos em cada elemento, a partir de graus-de-liberdade nodais (funções de forma convencionais). Este método pode ser empregado em estruturas unidimensionais, bidimensionais (caso presente) e tridimensionais. No caso do presente estudo, para elementos de geometria axissimétrica (ex.: cilindros, esferas, placas circulares, etc.), considera-se que o deslocamento longitudinal em um elemento é dado por uma função cúbica e o radial é dado por uma combinação linear entre a solução analítica para o caso de vasos esféricos e cilíndricos, Harry-2004. Os elementos podem ser distribuídos de acordo com a necessidade da análise, cujo refinamento da malha poderá exigir uma concentração de elementos nas regiões da estrutura cuja variação dos deslocamentos seja mais intensa. As expressões para os deslocamentos axial e radial são, respectivamente:

$$U = U_0 + U_1 T + F_1 T^2 + Y_1 T^3 \quad (19)$$

$$e \quad W = W_0 + \frac{W_1}{R} + W_2 R + \frac{W_3}{R^2}. \quad (20)$$

Empregando-se as equações constitutivas para materiais linearmente elásticos segundo a lei de Hooke e aplicando a condição de contorno de nulidade nas paredes interna e externa da tensão cisalhante, é possível extrair duas variáveis das equações acima. Assim, Harry-2004,

$$\mathbf{f}_1 = -\frac{2R_1(h-3R_1)}{h(h^2-12R_1^2)s'} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{x}}_{z=+1} - \frac{2R_1(h+3R_1)}{h(h^2-12R_1^2)s'} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{x}}_{z=-1} + \frac{4R_1}{(h^2-12R_1^2)} \left[\frac{U_0}{R_1} - Y_1 \right] \quad (21)$$

$$\Psi_1 = \frac{2R_1(4R_1-h)}{h^2(h^2-12R_1^2)s'} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{x}}_{z=+1} + \frac{2R_1(4R_1+h)}{h^2(h^2-12R_1^2)s'} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{x}}_{z=-1} + \frac{16R_1^2}{h^2(h^2-12R_1^2)} \left[\frac{U_0}{R_1} - Y_1 \right] \quad (22)$$

Com as variáveis características dos deslocamentos pode-se, a partir do método de energia, obter as condições do equilíbrio através da minimização da função de energia potencial,

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{e}^T \hat{\mathbf{s}} dV - \int_A \hat{\mathbf{u}}^T F dA \quad (23)$$

Implicando em:

$$\partial \Pi = \frac{1}{2} \int_V \partial \mathbf{e}^T \hat{\mathbf{s}} dV - \int_A \partial \hat{\mathbf{u}}^T F dA = 0 \quad (24)$$

onde tem-se, para um arco de 1 radiano de circunferência,

$$dA = (r \cdot 1) \cdot dr = \left(R_2 + \frac{h}{2} \mathbf{z} \right) \frac{h}{2} d\mathbf{z}, \quad (25)$$

Nas equações acima, as variáveis de estável – deslocamentos – estão listadas no vetor $\hat{\mathbf{u}}$, F representa as forças de superfície que atuam sobre o corpo, $\mathbf{e} = [\mathbf{e}_{xx} \quad \mathbf{e}_{yy} \quad \mathbf{e}_{zz} \quad \mathbf{g}_{xy} \quad \mathbf{g}_{yz} \quad \mathbf{g}_{zx}]$ é o vetor das deformações e $\hat{\mathbf{s}}^T = [\mathbf{s}_{xx} \quad \mathbf{s}_{yy} \quad \mathbf{s}_{zz} \quad \mathbf{s}_{xy} \quad \mathbf{s}_{yz} \quad \mathbf{s}_{zx}]$ o vetor das tensões. Por hipótese, o material é homogêneo e isotrópico e obedece a lei de Hooke, $\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{C} \mathbf{e}$, onde \mathbf{C} é a matriz constitutiva das propriedades elásticas do material:

$$\mathbf{C} = \frac{E(1-\mathbf{n})}{(1-2\mathbf{n})(1+\mathbf{n})} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mathbf{n}}{(1-\mathbf{n})} & \frac{\mathbf{n}}{(1-\mathbf{n})} & 0 \\ \frac{\mathbf{n}}{(1-\mathbf{n})} & 1 & \frac{\mathbf{n}}{(1-\mathbf{n})} & 0 \\ \frac{\mathbf{n}}{(1-\mathbf{n})} & \frac{\mathbf{n}}{(1-\mathbf{n})} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\mathbf{n})}{2(1-\mathbf{n})} \end{bmatrix} \quad (27)$$

O domínio da casca é subdividido em partições - elementos - e uma aproximação do campo de deslocamentos $\hat{\mathbf{u}}$ é realizada em cada elemento, através das variáveis que os representam, agrupadas no vetor $\hat{\mathbf{U}} = [U_0^{(1)} \quad Y_1^{(1)} \quad W_0^{(1)} \quad W_1^{(1)} \quad W_2^{(1)} \quad W_3^{(1)} \quad \dots \quad U_0^{(i)} \quad Y_1^{(i)}]$, para cada nó- i . Assim, para todo elemento- n ,

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{H}_{(xyz)}^{(n)} \hat{\mathbf{U}}. \quad (28)$$

Com as equações de compatibilidade geométrica, a matriz que relaciona as variáveis dos deslocamentos dos nós de um elemento ao campo de deformações é obtida, resultando

$$\mathbf{e} = \mathbf{B}_{(xyz)}^{(n)} \hat{\mathbf{U}}^{(n)} \quad (29)$$

Logo, da condição de estacionaridade resulta

$$\begin{aligned} d\Pi &= \frac{1}{2} \int_V d\hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \hat{\mathbf{U}} dV - \int_V d\hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{H}^T q dA - \int_V d\hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{H}^T f dA = 0 \\ \frac{1}{2} \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \hat{\mathbf{U}} dV &= \int_A \mathbf{H}^T q dA + \int_A \mathbf{H}^T f dA \equiv \mathbf{K} \hat{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{R}} \end{aligned} \quad (30)$$

onde

$$K = \frac{1}{2} \int_V B^T C B dV \text{ e } \hat{R} = \int_A H^T q dA + \int_A H^T f dA. \quad (31)$$

Desta forma a matriz de rigidez K e o vetor carregamento \hat{R} são obtidos, com contribuições para vetor de forças axiais e radiais, que no nó em que a força está aplicada,

$$F_q = q \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ hR_2 \\ h \\ h \left(R_2^2 + \frac{h^2}{12} \right) \\ \ln \left(\frac{R_2 + h/2}{R_2 - h/2} \right) \end{bmatrix}, \quad (32)$$

$$\text{e ainda: } F_f = f \begin{bmatrix} R_2 h \\ h/15 \\ -A_i h^3 \\ -A_i \frac{h^2}{24s'} \left[R_2 \left[\frac{1}{r_o} - \frac{1}{r_i} \right] + \frac{h}{5} \left[\frac{1}{r_o} + \frac{1}{r_i} \right] \right] \\ -7A_i \frac{h^3 R_2}{120s'} \\ -A_i \frac{h^2}{24s'} \left[R_2 \left[\frac{1}{r_o^2} - \frac{1}{r_i^2} \right] + \frac{h}{5} \left[\frac{1}{r_o^2} + \frac{1}{r_i^2} \right] \right] \end{bmatrix} \quad (33)$$

No caso da componente axial para os demais nós do elemento $F_f[0] = F_f[1] = 0$. Ainda, o valor de A_i varia de acordo com o nó em que é calculado o vetor. Os valores a utilizar são -2.75, +2.75, -0.75 e +0.75 para os nós 1, 2, 3 e 4, respectivamente. No caso presente da casca cilíndrica deve-se utilizar: $R_1 \rightarrow \infty$ e $R_2 = c^{te}$. A matriz B, associada a cada elemento do modelo possui ordem 4x6 e está explicitada no Apêndice deste trabalho.

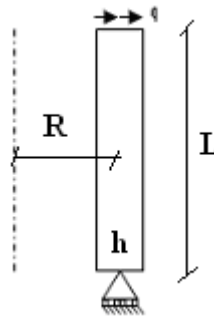
Os elementos que fazem a discretização do problema contínuo são unidimensionais, considerando-se a geometria em um arco de cilindro de 1rad e de comprimento a ser definido de acordo com a discretização necessária para acomodar as condições de contorno. Estes possuem 4 nós distribuídos de acordo com a figura 4, com as coordenadas e os deslocamentos interpolados na direção longitudinal através dos polinômios de Lagrange.

$$\begin{aligned} h_1(\mathbf{x}) &= \frac{(-9\mathbf{x}^3 + 9\mathbf{x}^2 + \mathbf{x} - 1)}{16} & ; & & h_2(\mathbf{x}) &= \frac{(9\mathbf{x}^3 + 9\mathbf{x}^2 - \mathbf{x} - 1)}{16}; \\ h_3(\mathbf{x}) &= \frac{(27\mathbf{x}^3 - 9\mathbf{x}^2 - 27\mathbf{x} + 9)}{16} & ; & & h_4(\mathbf{x}) &= \frac{(-27\mathbf{x}^3 - 9\mathbf{x}^2 + 27\mathbf{x} + 9)}{16} \end{aligned} \quad (36)$$

$$r(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^4 h_i(\mathbf{x}) r_i \quad ; \quad z(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^4 h_i(\mathbf{x}) z_i \quad (37)$$

e discutidas. Desse modo, objetiva-se verificar a aplicabilidade da versatilidade do modelo numérico para diversas discretizações longitudinais .

Inicialmente considerou-se estudo do cilindro livre submetido ao carregamento transversal concentrado cujo resultado pode ser validado através de solução analítica disponível na literatura.



Para este, utilizou-se o comprimento $L = 20\text{m}$, a espessura da casca $h = 0,1\text{m}$, o Módulo de Elasticidade e coeficiente de Poisson do aço são $E = 200\text{GPa}$ e $\nu = 0,3$, o raio médio $R = 2\text{ m}$ e o carregamento na extremidade de $q = 10\text{ kN/m}^2$.

A solução analítica para o deslocamento radial na extremidade onde se aplica a força, segundo [3] para cascas finas:

$$I = \left[\frac{3(1-\nu)^2}{R^2 h^2} \right]^{1/4} = 2,8742$$

$$w = \frac{q \cdot h}{2I^3 D} = 1,1497 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

Desse modo, a partir deste resultado, foi montada a tabela abaixo, que visa comparar a resposta obtida com diferentes números de elementos com aquela analítica, definindo assim o erro obtido em cada um deles:

Número de Elementos	w (.10 ⁻⁶ m)	Erro (%)
16	1,1187	2,70
32	1,1463	0,30
64	1,1580	0,72
128	1,1587	0,78
256	1,1588	0,79

Os resultados podem ser visualizados ao longo do comprimento do cilindro a partir das curvas da figura a seguir. Estas mostram o deslocamento radial sofrido por cada coordenada longitudinal, em que na segunda é focalizado o comprimento final do cilindro, onde ocorre uma maior variação da curva:

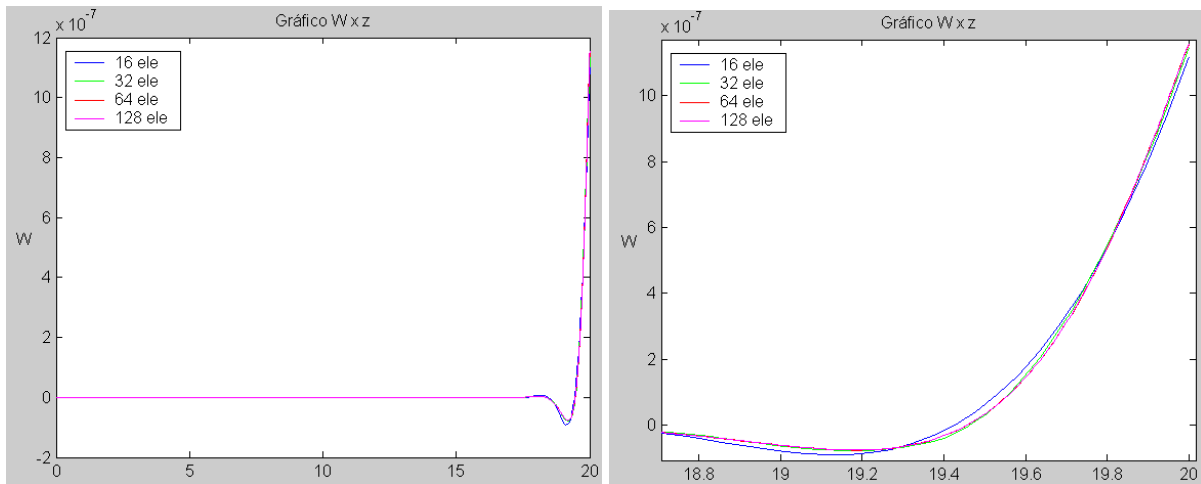


Figura : Deslocamento radial para o cilindro livre.

Podemos ver que o resultado converge rapidamente, ainda que para 16 elementos o erro seja consideravelmente bom. Mas como a resposta para o método é assintótica, podemos perceber que a solução analítica possui um resultado menor que a convergência da solução, que é uma aproximação por polinômio de grau 3 para a resposta. Agora, se utilizamos uma diferenciação na distribuição da malha, onde (a x b) significa que temos ‘a’ elementos de 0 a 15 m e ‘b’ elementos de 15 a 20 m, então podemos montar uma nova tabela comparativa, definindo o erro em relação a resposta analítica:

Número de Elementos	w (.10 ⁻⁶ m)	Erro (%)
(4 x 12)	1,1561	0,56
(5 x 27)	1,1587	0,78
(10 x 54)	1,1588	0,79
(10 x 118)	1,1590	0,81
(10 x 246)	1,1589	0,80

Podemos verificar que a resposta já converge significativamente para apenas 16 elementos. Se concentrarmos uma maior discretização da malha nos pontos do corpo onde ocorre uma maior variação do comportamento, podemos reproduzir resultados de uma simulação com muitos elementos homogeneamente distribuídos com apenas alguns poucos para uma malha rearranjada.

Já o deslocamento axial apresenta o mesmo resultado, a aproximação para 32 elementos já tem uma convergência razoável, como podemos ver na curva a seguir. Esta mostra o deslocamento axial sofrido em função da coordenada longitudinal:

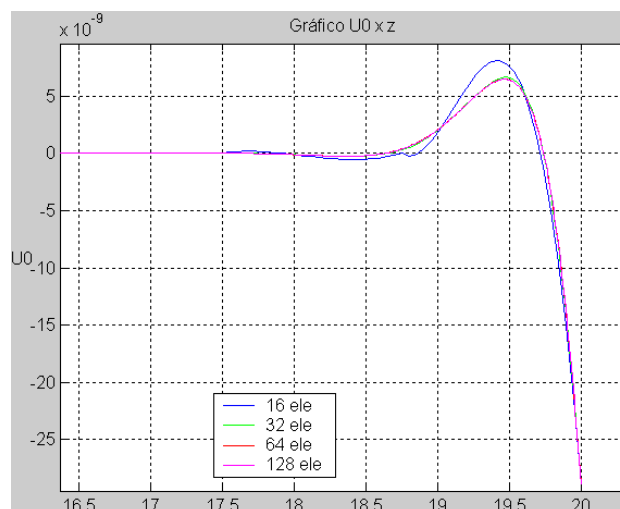


Figura : deslocamento axial para cilindro livre.

Já as tensões apresentam um resultado um pouco diferente pois demoram mais para convergir. Desse modo, podemos esperar obter um erro relativamente maior para esta do que para os deslocamentos calculados. Analiticamente a tensão circunferencial máxima é $1,1497 \cdot 10^5$ Pa e a de cisalhamento é a aplicada, ou seja, -10^4 Pa, ambas na extremidade onde se aplica a força. Assim, a tabela a seguir relaciona o resultado numérico obtido com a resposta calculada:

Número de elementos	Tensão circunferencial máxima (10^5 Pa)	Erro (%)	Tensão Cisalhante máxima (10^4 Pa)
32	1,1506	0,07	-2,3499
64	1,1584	0,75	-1,8419
128	1,1592	0,83	-1,5133
256	1,1492	0,68	-1,4027

De fato, podemos ver pela figura abaixo o comportamento sofrido pela tensão circunferencial no cilindro, esta em função da coordenada axial:

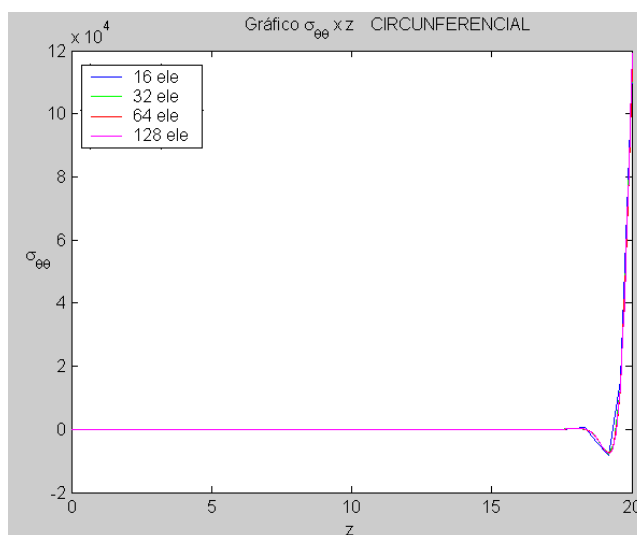
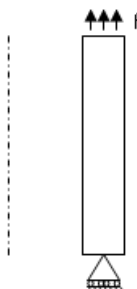


Figura : tensão circunferencial ao longo da coordenada longitudinal

Pode-se verificar que as tensões são consideravelmente mais difíceis de se obter a aproximação desejada.

Agora, do mesmo modo, vamos considerar mais uma vez o cilindro livre, no entanto, agora com uma força atuando axialmente na extremidade.



A geometria utilizada ainda é a mesma anterior, no entanto aumentamos a magnitude da força, de modo que este agora vale 10^7 N/m².

Os valores para o deslocamento axial e radial na extremidade (máximos) podem ainda ser calculados analiticamente, uma vez que temos um cilindro livre e de paredes finas. Assim, temos que $u = 10^{-3}$ m e $w = -3.10^{-3}$ m. Então, a partir da tabela abaixo, podemos ver a comparação, assim como o cálculo do erro para cada resposta numérica calculada, para o deslocamento axial (u) e radial (w):

Número de elementos	u (10^{-3})	Erro (%)	w (10^{-5})	Erro (%)
32	1,000	-	-3,025	2,50
64	1,000	-	-3,024	2,50
128	1,000	-	-3,030	2,50

Vemos que o erro obtido pelo cálculo do deslocamento é consideravelmente pequeno, uma vez que como a tensão axial é constante em toda a extensão do cilindro, provocando um deslocamento com comportamento linear axialmente, que pode ser facilmente aproximado. Desse modo, as figuras abaixo relacionam os deslocamentos com a coordenada longitudinal do cilindro, onde verificamos o comportamento linear para u e não-linear para w :

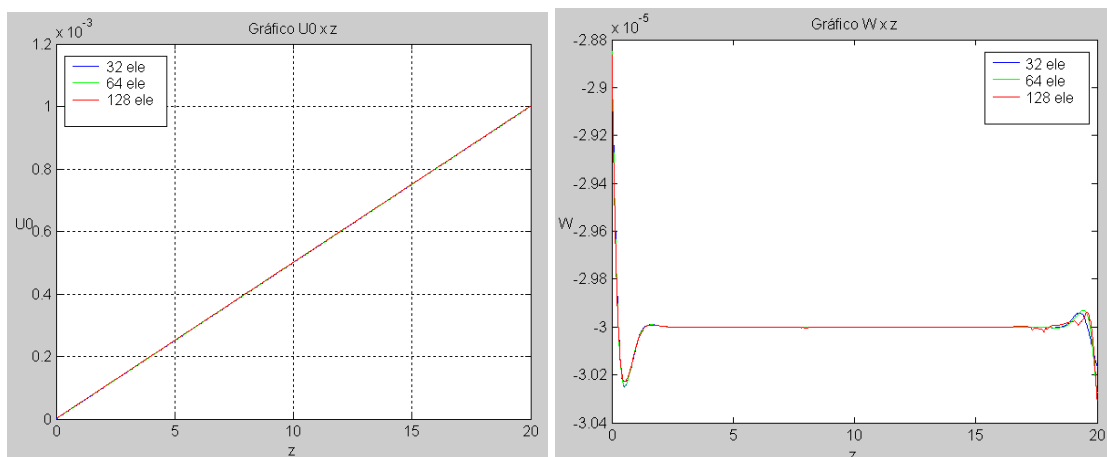


Figura : deslocamento axial e radial

Ainda, como o carregamento tem unidade de força por área, podemos verificar que o valor da tensão axial é constante e vale o próprio carregamento aplicado através da figura abaixo:

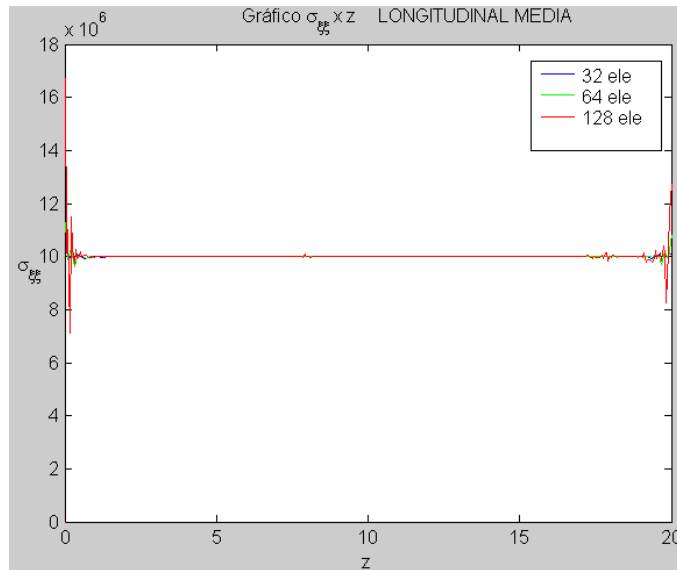


Figura : Tensão longitudinal em função do comprimento

Os pontos em que existe uma maior variação do deslocamento são também onde encontramos as maiores oscilações dos valores das tensões, causadas pelos erros de aproximação numérica, uma vez que com o aumento do número de elementos, diminuimos o tamanho de cada um deles. Do mesmo modo, pelas hipóteses utilizadas, devemos esperar que todas as outras tensões sejam nulas ao longo do eixo, salvas as extremidades, onde estão sendo aplicados os carregamentos axiais. Estas tensões podem ser visualizadas em função da coordenada longitudinal nas figuras a seguir:

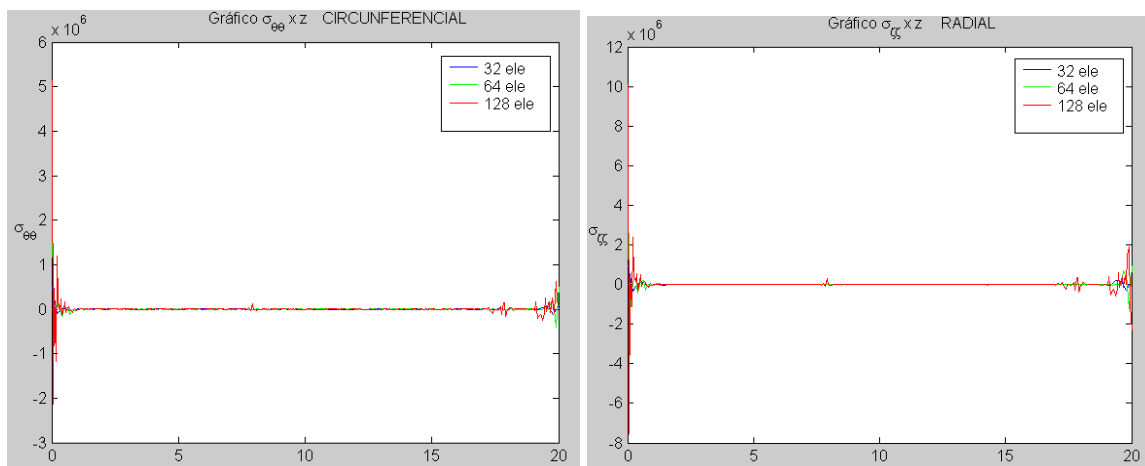


Figura : Tensão circunferencial e radial ao longo da coordenada longitudinal

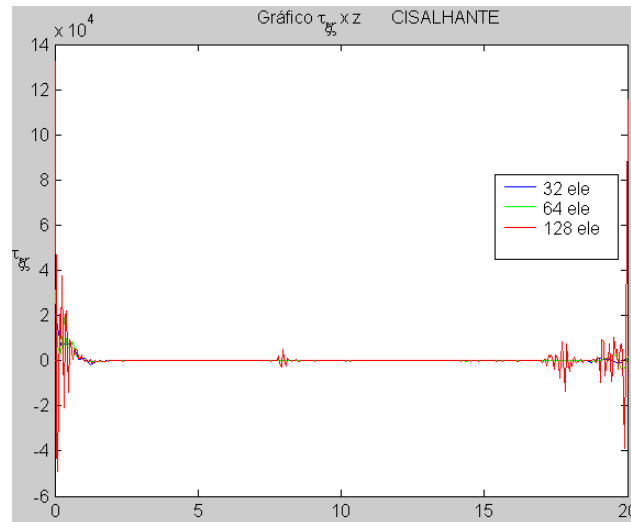
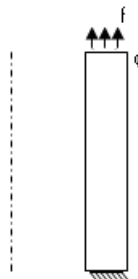


Figura : Tensão cisalhante ao longo da coordenada longitudinal

O programa desenvolvido leva em consideração que todos os deslocamentos calculados são muito pequenos, de modo que possam ser feitas algumas aproximações e que o problema possa ser considerado linear. Desse modo, podemos verificar a superposição de soluções.

A partir do seguinte caso, serão tratados casos em que não é possível obter uma solução analítica. As condições de contorno tais como engastado e pivotado não permitem a obtenção da curva de deslocamento para todo o cilindro. Desse modo, o estudo que será desenvolvido será meramente qualitativo e autocomparativo, esperando verificar a convergência da solução para diferentes malhas.

Agora será realizado o estudo com o carregamento axial com diferentes condições de contorno. Primeiramente engastado e submetido a uma força de 10^{12} Pa, utilizando a mesma geometria e material anteriores:



Neste caso, para uma distribuição homogênea dos elementos, teremos o comportamento para o deslocamento radial e axial mostrados nas figuras a seguir. Ambas relacionam o deslocamento com a coordenada axial para diferentes quantidades de elementos (16, 32, 64 e 128 elementos), cada um pode ter seu comportamento distinguido por uma cor:

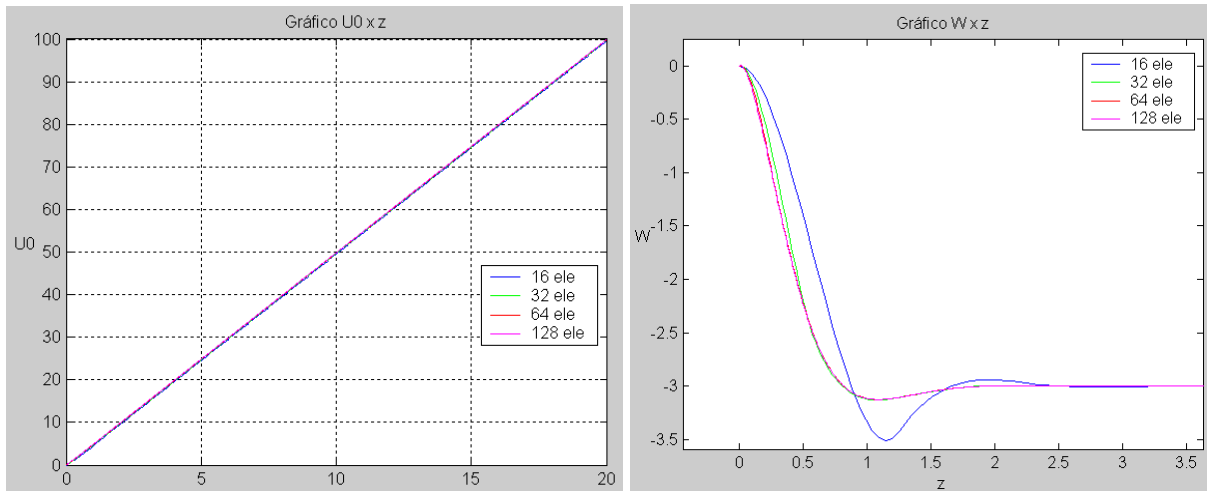


Figura : Deslocamento axial e radial na coordenada longitudinal

Podemos perceber que para o deslocamento axial, a diferença não é significativa, uma vez que estamos aproximando uma curva de comportamento linear através de uma de terceiro grau. Já para o deslocamento radial, principalmente quando temos poucos elementos, não podemos garantir uma aproximação considerável. Desse modo, fazendo a redistribuição dos elementos de modo a acumular um maior número antes de 2 m e depois de 18 m (em cada um deles 5, 10 e 20 elementos para 16, 32 e 64, respectivamente, e o restante dos elementos entre 2 e 18 m), já que estas regiões sofrem as maiores variações. A distribuição será feita para 16, 32 e 64 elementos e estes serão comparados para a malha de 128 elementos homogeneamente distribuídos. Observamos o comportamento observado na curva a seguir para o deslocamento radial observado:

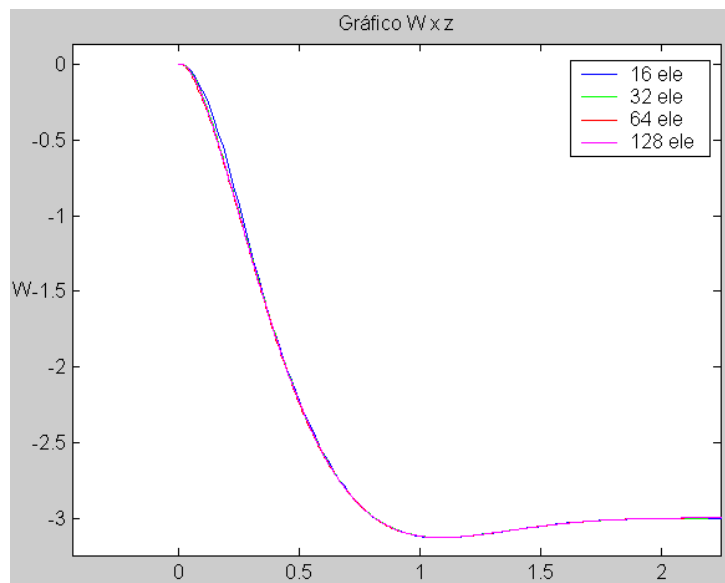
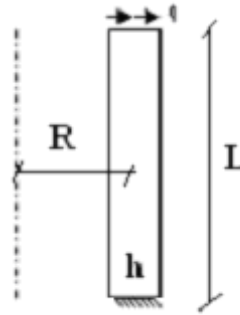


Figura : Deslocamento radial na coordenada longitudinal

Agora, com apenas a utilização de 16 elementos, foi possível reproduzir com bastante confiabilidade o resultado para 32 elementos homogêneos. Analogamente, para 32 elementos, temos praticamente a superposição com a resposta para 128.

Agora, o carregamento será efetuado radialmente em um cilindro engastado, com a mesma geometria anterior. Ou seja, a simulação será a da seguinte estrutura, definindo $q = 10^4$ Pa:



Primeiramente, foi feita a simulação com quatro malhas com quantidades de elementos diferentes e homogeneamente distribuídos ao longo do eixo. Desse modo, podemos obter as figuras a seguir, que representam os deslocamentos axial (u) e radial (w) para cilindros com 16, 32, 64 e 128 elementos:

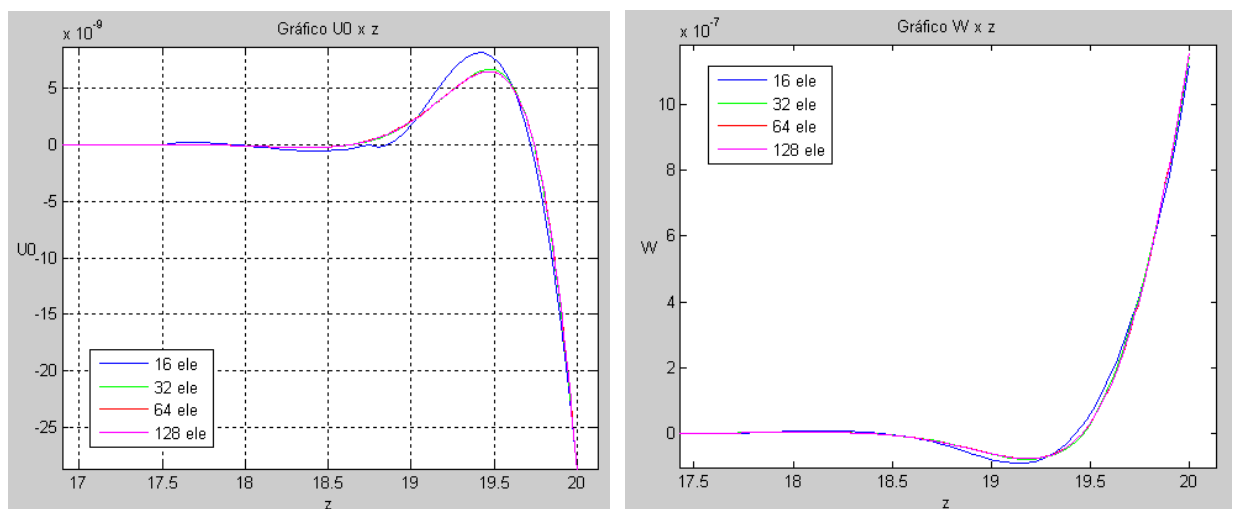


Figura : Deslocamento axial e radial em função da coordenada longitudinal.

Podemos verificar uma resposta semelhante à observada anteriormente. O comportamento para 16 elementos é discrepante em relação aos com mais elementos, cujo erro diminui. Desse modo, agora será efetuada uma distribuição dos elementos na malha, de modo que sejam focados os lugares em que existam maiores variações. Será, então construída uma malha do tipo ($a \times b \times c$), ou seja, 'a' elementos até 2 metros, 'b' entre 2 e 18 metros e 'c' de 18 a 20 m. Então:

Número de elementos	Distribuição
16	(5 x 6 x 5)
32	(10 x 12 x 10)
64	(20 x 24 x 20)
128	(40 x 48 x 40)

De fato, as figuras a seguir relacionam o deslocamento com a coordenada axial para os cilindros com malha diferenciada, desse modo:

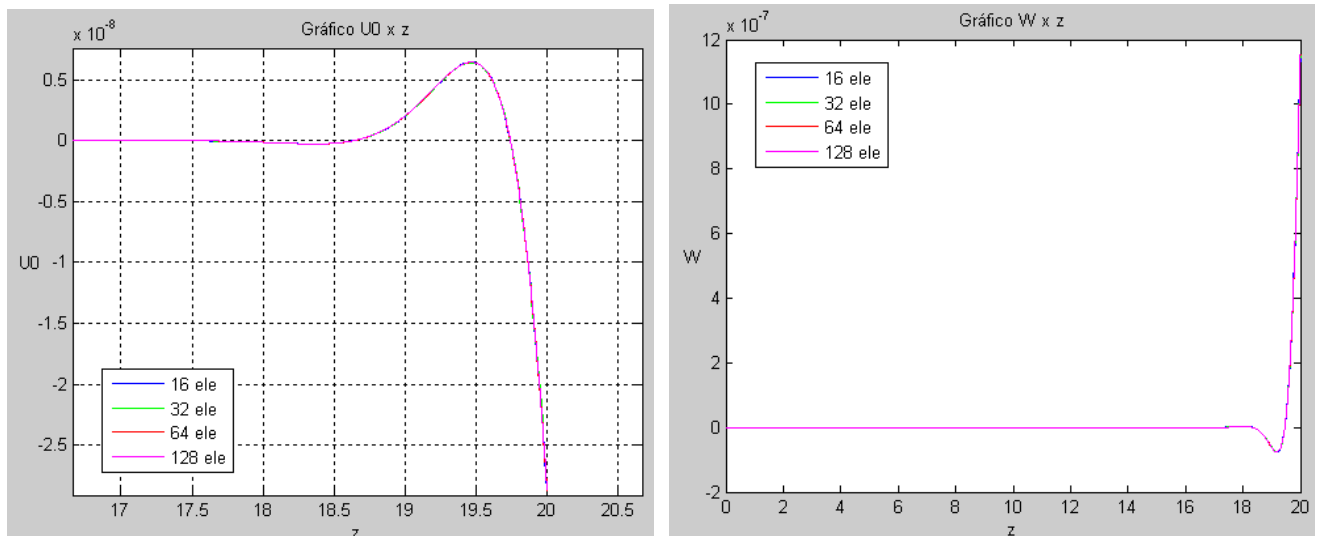
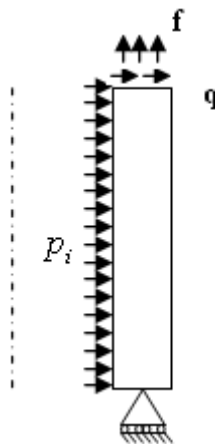


Figura : Deslocamento axial e radial para malha reestruturada

A resposta encontrada para este caso é a buscada pois podemos ver que foi possível reproduzir praticamente o mesmo resultado de 128 elementos utilizando apenas 16 elementos. Todas as curvas estão sobrepostas, indicando que a convergência da resposta pode ser considerada saturada e a utilização de um número muito grande de elementos tornou-se desnecessária.

Por último, o caso que será tratado agora envolverá todos os tipos de carregamento. Será considerada a pressão interna, carregamento axial e radial, desse modo a resposta será a superposição destas três. Assim, podemos montar:



Ainda com mesma geometria e material utilizado até o momento, a magnitude dos carregamentos serão determinados como: $p_i = f = q = 10\text{kPa}$. Deste modo, a tabela a seguir apresenta os valores máximos encontrados para cada variável. Ainda, o valor analítico para o deslocamento radial pode ser calculado:

$$w = w_p + w_f + w_q = 2.10^{-6} + 1,1497.10^{-6} + (-3.10^{-8}) = 3,1197.10^{-6} \text{ m.}$$

A tensão máxima é observada na extremidade e corresponde a 10 kPa para o cisalhamento (devido ao carregamento q), a 10 kPa para esforço axial (devido ao carregamento f) e o circunferencial pode ser calculado como a soma das contribuições do carregamento axial e da pressão interna:

$$s_c = s_f + s_p = 1,1468.10^5 + 2.10^5 = 3,1498.10^5 \text{ Pa.}$$

Podemos montar o seguinte, onde o erro é calculado em relação ao resultado analítico encontrado:

Número de Elementos	w (10 ⁻⁶ m)	Erro (%)	s _c (10 ⁶ Pa)	Erro (%)
32	3.0800	1,27	3,1029	1,48
64	3,0916	0,90	3,1141	1,10
128	3,0922	0,88	3,1391	0,34

Agora, considerando o rearranjo da malha para 32 elementos, considerando 10 elementos entre 0 e 2 e entre 18 e 20, podemos definir a seguinte tabela:

Número de Elementos	w (10 ⁻⁶ m)	Erro (%)	s _c (10 ⁶ Pa)	Erro (%)
32 (10 x 12 x 10)	3,0921	0,88	3,1155	1,10

Já é possível perceber praticamente a mesma resposta, salvo o fato de que as tensões precisam de mais iterações para convergir. Se fizermos o mesmo tipo de distribuição para 128 elementos, temos:

Número de Elementos	w (10 ⁻⁶ m)	Erro (%)	s _c (10 ⁶ Pa)	Erro (%)
128 (40 x 44 x 40)	3,0919	0,90	3,1046	0,73

Desse modo podemos ver que a resposta já saturou. O método busca uma aproximação pré-definida para a resposta real do problema, que só seria alcançada considerando um número infinito de elementos.

Apêndices

A- Elementos da matriz de compatibilidade geométrica B:

$$a_{11} = \frac{1}{s'} \left[\frac{\partial h_i}{\partial \mathbf{x}} \right]$$

$$a_{12} = \frac{1}{s'} \left[T \frac{\partial h_i}{\partial \mathbf{x}} + T^3 \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[-\frac{4}{3h^2} h_i \right] \right] = \frac{hz}{6s'} \frac{\partial h_i}{\partial \mathbf{x}} [3 - z^2]$$

$$a_{13} = \frac{1}{s'} \left[T^3 \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(-\frac{2}{3h^2 s'} \left[2 \frac{\partial h_i}{\partial \mathbf{x}} \right] \right) \right] = -\left(\frac{h}{2} \mathbf{z} \right)^3 \frac{4}{3h^2 s'^2} \frac{\partial^2 h_i}{\partial \mathbf{x}^2} = -\mathbf{z}^3 \frac{h}{6s'^2} \frac{\partial^2 h_i}{\partial \mathbf{x}^2}$$

$$a_{14} = -\frac{hz^2}{4s'^2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_o} - \frac{1}{R_i} \right) + \frac{\mathbf{z}}{3} \left(\frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_i} \right) \right] \frac{\partial^2 h_i}{\partial \mathbf{x}^2}$$

$$a_{15} = -\frac{hz^2}{4s'^2} \left[\frac{(R_o - R_i)}{2} + \frac{(R_o + R_i)}{3} \mathbf{z} \right] \frac{\partial^2 h_i}{\partial \mathbf{x}^2} = -\frac{hz^2}{4s'^2} \left[\frac{h}{2} + \frac{2R_2}{3} \mathbf{z} \right] \frac{\partial^2 h_i}{\partial \mathbf{x}^2}$$

$$a_{16} = -\frac{hz^2}{4s'^2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_o^2} - \frac{1}{R_i^2} \right) + \frac{1}{3} \mathbf{z} \left(\frac{1}{R_o^2} + \frac{1}{R_i^2} \right) \right] \frac{\partial^2 h_i}{\partial \mathbf{x}^2}$$

$$a_{21} = 0$$

$$a_{22} = 0$$

$$a_{23} = \frac{h_i}{R}$$

$$a_{24} = \frac{h_i}{R^2}$$

$$a_{25} = h_i$$

$$a_{26} = \frac{h_i}{R^3}$$

$$a_{31} = 0$$

$$a_{32} = 0$$

$$a_{33} = \frac{2}{h} \frac{\partial h_i}{\partial \mathbf{z}} = 0$$

$$a_{34} = \frac{2}{h} \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \left(\frac{h_i}{R} \right) = \frac{2h_i}{h} \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \left(\frac{1}{R_2 + \frac{h}{2} \mathbf{z}} \right) = -\frac{2h_i}{h} \frac{1}{\left(R_2 + \frac{h}{2} \mathbf{z} \right)^2} \cdot \frac{h}{2} = -\frac{h_i}{R^2}$$

$$a_{35} = \frac{2h_i}{h} \frac{\partial R}{\partial \mathbf{z}} = \frac{2h_i}{h} \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \left(R_2 + \frac{h}{2} \mathbf{z} \right) = \frac{2h_i}{h} \frac{h}{2} = h_i$$

$$a_{36} = \frac{2h_i}{h} \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \left(\frac{1}{R^2} \right) = \frac{2h_i}{h} \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \left(\frac{1}{\left(R_2 + \frac{h}{2} \mathbf{z} \right)^2} \right) = -\frac{4h_i}{h} \left(\frac{1}{\left(R_2 + \frac{h}{2} \mathbf{z} \right)^3} \right) \frac{h}{2} = -\frac{2h_i}{R^3}$$

$$a_{41} = \frac{2}{h} \frac{\partial h_i}{\partial \mathbf{z}} = 0$$

$$a_{42} = 2h_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{z} - \frac{1}{6} \mathbf{z}^3 \right) = h_i (1 - \mathbf{z}^2)$$

$$a_{43} = \frac{1}{s'} [1 - \mathbf{z}^2] \frac{\partial h_i}{\partial \mathbf{x}}$$

$$a_{44} = \frac{1}{s'} \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R_o} - \frac{1}{R_i} \right] \mathbf{z} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_i} \right] \mathbf{z}^2 \right] \frac{\partial h_i}{\partial \mathbf{x}}$$

$$a_{45} = \frac{1}{s'} \left[R - \frac{1}{2} [R_o - R_i] \mathbf{z} - \frac{1}{2} [R_o + R_i] \mathbf{z}^2 \right] \frac{\partial h_i}{\partial \mathbf{x}}$$

$$a_{46} = \frac{1}{s'} \left[\frac{1}{R^2} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R_o^2} - \frac{1}{R_i^2} \right] \mathbf{z} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R_o^2} + \frac{1}{R_i^2} \right] \mathbf{z}^2 \right] \frac{\partial h_i}{\partial \mathbf{x}}$$

B- Lista dos principais símbolos utilizados

B: Matriz de deformação-deslocamento

C: Matriz constitutiva

E: Módulo de elasticidade

H: Matriz função de interpolação

J: Matriz Jacobiana de transformação

K: Matriz rigidez

R_1 e R_2 : Raios de curvatura principais

r_o e r_i : raios externo e interno, respectivamente

h: espessura do cilindro

U: deslocamento na direção axial

W: deslocamento na direção radial

q e **f**: magnitudes das forças nodais por unidade de área

ds: comprimento infinitesimal entre os pontos **P** e **P'** na superfície média

h_i : polinômio de Lagrange associado ao nó **i** do elemento.

x, **y**, **z**: coordenadas cartesianas

x, **V**, **q** : coordenadas locais para cada elemento [-1, +1]

a : parâmetro de penalidade

e : tensor deformação

s : tensor tensão

n : coeficiente de Poisson

Conclusões

A fácil adaptação da malha para uma maior concentração de elementos nas regiões de grande variação dos deslocamentos e tensões, evidencia a aplicabilidade do programa na modelagem e análise geral de vasos de pressão, reduzindo o esforço computacional necessário para o estudo numérico. Isto pode ser observado na grande versatilidade da construção da malha, sendo possível concentrar mais elementos em uma determinada região do modelo, onde uma maior variação está presente, garantindo-se desta forma uma aproximação tão boa quanto aquela obtida para uma mesma simulação, com um número maior de elementos.

Os resultados das análises numéricas consideradas permitem verificar-se a consistência entre as soluções obtidas e as similares analíticas, disponíveis na literatura. Nos casos mais complexos de solução, a avaliação é realizada comparando-se com as soluções obtidas com outros modelos numéricos como, por exemplo, com aquelas fornecidas por programas comerciais. Uma vez que as soluções analíticas não têm a mesma versatilidade de generalização que as simulações realizadas através de modelos de elementos finitos, o ferramental numérico desenvolvido neste trabalho permite estudar o comportamento estrutural em que as hipóteses simplificadoras analíticas não se aplicam exatamente.

Referências Bibliográficas

Barreto, M. P. e Almeida, C. A. **Elementos Finitos aplicados às Cascas Axissimétricas**. Relatório de Iniciação Científica, 2007-8. PUC-Rio, Departamento de Engenharia Mecânica, 18p.

Bathe, Klaus-Jürgen. **Finite Element Procedures**, Prentice Hall, 1996. 1037p.

Espinoza, Harry G. S. **Formulação de Cascas Espessas Axissimétricas Utilizando Elementos Finitos Enriquecidos**. PUC-Rio, Departamento de Engenharia Mecânica, Dissertação de Mestrado, 2004, 107p.

Raymond J. Roark e Warren C. Young, **Formulas for Stress and Strain**, Fifth Edition, McGraw-Hill, 1975, 924p.

Timoshenko, S. e S Woinowsky-Krieger, **Theory of Plates and Shells**, Second Edition, Engineering Societies Monographs, 1959, 580p.